

تمارين 1 : لنحدد مجموعة تعريف الدوال التالية :

$Df = \{x \in \mathbb{R} / x^2 + 2x > 0\} = \{x \in \mathbb{R} / x(x+2) > 0\} =]-\infty; -2[\cup]0; +\infty[$	$f(x) = \ln(x^2 + 2x)$
$Dg = \{x \in \mathbb{R} / x^2 - 2x + 5 > 0\} = \mathbb{R}$ لأن : $\Delta = 4 - 20 < 0$	$g(x) = \ln(x^2 - 2x + 5)$
$Dh = \{x \in \mathbb{R} / 5 - x > 0 \text{ et } x^2 - 3 > 0\} = \{x \in \mathbb{R} / 5 - x > 0 \text{ et } x^2 > 3\}$ $= \{x \in \mathbb{R} / x < 5 \text{ et } (x > \sqrt{3} \text{ ou } x < -\sqrt{3})\}$ $= \{x \in \mathbb{R} / (x < 5 \text{ et } x > \sqrt{3}) \text{ ou } (x < 5 \text{ et } x < -\sqrt{3})\}$	$h(x) = \ln(5 - x) + \ln(x^2 - 3)$
$Dh =]\sqrt{3}; 5[\cup]-\infty; -\sqrt{3}[=]-\infty; -\sqrt{3}[\cup]\sqrt{3}; 5[$	
$Dp = \{x \in \mathbb{R} / x > 0 \text{ et } 1 - \ln x \neq 0\} = \{x \in \mathbb{R} / x > 0 \text{ et } \ln x \neq 1\}$ $= \{x \in \mathbb{R} / x > 0 \text{ et } \ln x \neq \ln e\} = \{x \in \mathbb{R} / x > 0 \text{ et } x \neq e\}$	$p(x) = \frac{3}{1 - \ln(x)}$
$Dp =]0; e[\cup]e; +\infty[$	

تمارين 2 :

$D =]-\infty; -2[\cup]0; +\infty[$: مجموعة صلاحية المعادلة هي : الآن : $\ln(x^2 + 2x) = 0 \Leftrightarrow \ln(x^2 + 2x) = \ln 1 \Leftrightarrow x^2 + 2x = 1 \Leftrightarrow x^2 + 2x - 1 = 0$ بعد حساب المحددة نجد : $\Delta = 4 + 4 = 8 \Rightarrow \begin{cases} x_1 = \frac{-2 + \sqrt{8}}{2} = \frac{-2 + 2\sqrt{2}}{2} = -1 + \sqrt{2} \approx 0,41 \in D \\ x_2 = \frac{-2 - \sqrt{8}}{2} = \frac{-2 - 2\sqrt{2}}{2} = -1 - \sqrt{2} \approx -2,41 \in D \end{cases}$ إذن : $S = \{-1 + \sqrt{2}; -1 - \sqrt{2}\}$	$\ln(x^2 + 2x) = 0$
قبل إنجاز المعادلات أو المتراجحات يجب تحديد مجموعة صلاحية المعادلة وبعد إيجاد الحلول يجب التحقق من الحلول التي تنتمي لمجموعة الصلاحية ، طريقة الجواب أعلاه تمثل اختصارا لهذه الطريقة باستعمال الرموز الرياضية ، وقد استعملنا خلالها نتيجة 1 من التمرين السابق. أخيرا استعملنا تقريبا للحلول لنستطيع أن نحدد الحلول التي تنتمي لمجموعة صلاحية المعادلة $]-\infty; -2[\cup]0; +\infty[$ (وجدنا كلا الحلين ينتمي لمجموعة الصلاحية)	
$D = \{x \in \mathbb{R} / x^2 - 3 > 0 \text{ et } 2x > 0\} = \{x \in \mathbb{R} / x^2 > 3 \text{ et } x > 0\}$ $D = \{x \in \mathbb{R} / x > \sqrt{3}\} =]\sqrt{3}; +\infty[$ $\ln(x^2 - 3) = \ln(2x) \Leftrightarrow x^2 - 3 = 2x \Leftrightarrow x^2 - 2x - 3 = 0$ $\Delta = 4 + 12 = 16 \Rightarrow \begin{cases} x_1 = \frac{2 + 4}{2} = 3 \in D \\ x_2 = \frac{2 - 4}{2} = -1 \notin D \end{cases}$ بالتالي : $S = \{3\}$	$\ln(x^2 - 3) = \ln(2x)$
$D = \{x \in \mathbb{R} / x^2 + 3 > 0\} = \mathbb{R}$ $\ln(x^2 + 1) = 1 \Leftrightarrow \ln(x^2 + 1) = \ln(e) \Leftrightarrow x^2 + 1 = e$ بالتالي : $S = \{\sqrt{e-1}, -\sqrt{e-1}\}$ $\ln(x^2 + 1) = 1 \Leftrightarrow x^2 = e - 1$ $\ln(x^2 + 1) = 1 \Leftrightarrow x = \sqrt{e-1} \text{ ou } x = -\sqrt{e-1}$	$\ln(x^2 + 1) = 1$

$$D = \{x \in \mathbb{R} / x+1 > 0 \text{ et } 2x > 0\} = \{x \in \mathbb{R} / x > -1 \text{ et } x > 0\} =]0; +\infty[$$

$$\ln(x+1) \geq \ln(2x) \Leftrightarrow x+1 \geq 2x \Leftrightarrow x-2x \geq -1 \Leftrightarrow -x \geq -1 \Leftrightarrow x \leq 1$$

2

$$S =]-\infty; 1] \cap]0; +\infty[=]0, 1] \quad \text{بالتالي}$$

تمرين 3 :

$$\ln(\sqrt{\sqrt{2}+1}) + \ln(\sqrt{\sqrt{2}-1}) = \ln(\sqrt{\sqrt{2}+1} \times \sqrt{\sqrt{2}-1}) = \ln(\sqrt{(\sqrt{2}+1)(\sqrt{2}-1)}) = \ln(\sqrt{2-1}) = \ln(1) = 0$$

1

استعملنا الخاصية: $\ln(x) + \ln(y) = \ln(xy)$

$$\ln(\sqrt{6}) = \frac{1}{2} \ln(6) = \frac{1}{2} (\ln(2) + \ln(3)) \approx \frac{0,7 + 1,1}{2} \approx 0,9$$

$$\ln\left(\frac{16}{9}\right) = \ln(16) - \ln(9) = \ln(2^4) - \ln(3^2) = 4\ln(2) - 2\ln(3) \approx 4 \times 0,7 - 2 \times 1,1 \approx 2,8 - 2,2 \approx 0,6$$

$$\ln(\sqrt[3]{12}) = \frac{1}{3} \ln(12) = \frac{1}{3} \ln(2^2 \times 3) = \frac{2\ln(2) + \ln(3)}{3} \approx \frac{1,4 + 1,1}{3} \approx \frac{2,5}{3} \approx 0,8$$

2

$$\ln(\sqrt[n]{x}) = \frac{1}{n} \ln(x) \quad \text{و} \quad \ln(x^r) = r \ln(x) \quad \text{و} \quad \ln\left(\frac{x}{y}\right) = \ln(x) - \ln(y) \quad \text{استعملنا الخاصيات}$$

تمرين 4 :

$$f(x) = \ln(1 + \ln(x))$$

$$f'(x) = \frac{(1 + \ln(x))'}{1 + \ln(x)} = \frac{\frac{1}{x}}{1 + \ln(x)}$$

$$f(x) = \ln(7 - x^2)$$

$$f'(x) = \frac{(7 - x^2)'}{7 - x^2}$$

$$f'(x) = \frac{-2x}{7 - x^2}$$

$$f(x) = \ln(2x + 1)$$

$$f'(x) = \frac{(2x + 1)'}{2x + 1}$$

$$f'(x) = \frac{2}{2x + 1}$$

$$f(x) = x \ln(x) + \frac{\ln(\sqrt{x})}{x}$$

$$f'(x) = (x \ln(x))' + \left(\frac{1}{2} \frac{\ln(x)}{x}\right)'$$

$$f'(x) = 1 \times \ln(x) + x \times \frac{1}{x} + \frac{1}{2} \times \frac{x - 1 \times \ln(x)}{x^2}$$

$$f'(x) = \ln(x) + 1 + \frac{1 - \ln(x)}{2x^2}$$

$$f(x) = \ln^3(x)$$

$$f'(x) = 3(\ln^2(x))(\ln(x))'$$

$$f'(x) = 3\ln^2(x) \times \frac{1}{x}$$

من المستحسن استعمال خصائص دالة اللوغاريتم قبل الاشتقاق

$$\ln(u(x))' = \frac{(u(x))'}{u(x)} \quad \text{للتذكير}$$

تمرين 5 :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x)}{x} + \ln\left(\frac{x^2 + 5}{x^2 + 1}\right) = 0 + \ln(1) = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 + 5}{x^2 + 1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2}{x^2} = 1 \quad \text{لأن}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x)}{x^2} + \frac{\ln(x)}{\sqrt{x}} = 0 + 0 = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln(2x) + \frac{1}{\ln(x)} = +\infty$$

$$(+\infty + 0 \rightarrow +\infty)$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln(x) - x = \lim_{x \rightarrow +\infty} x \left(\frac{\ln(x)}{x} - 1\right) = -\infty$$

1

$$\sqrt{x} = x^{\frac{1}{2}}, \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x)}{x^r} = 0 \quad r > 0 \text{ لكل}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x)}{x} - 1 = 0 - 1 = -1 \text{ لأن}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x^2)}{x+2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2\ln(x)}{x+2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x}{x+2} \times \frac{\ln(x)}{x} = 2 \times 0 = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln^2(x) - x = \lim_{x \rightarrow +\infty} x \left(\frac{\ln^2(x)}{x} - 1 \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x \left(\left[\frac{\ln(x)}{\sqrt{x}} \right]^2 - 1 \right) = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \ln(2x) + \frac{1}{\ln(x)} = -\infty \quad (-\infty + 0)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln(x)}{x} = -\infty \quad \left(\frac{-\infty}{0^+} \rightarrow -\infty \right) \text{ و } \lim_{x \rightarrow 0^+} \ln\left(\frac{x^2+5}{x^2+1}\right) = \ln(5) \text{ لأن } , \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln(x)}{x} + \ln\left(\frac{x^2+5}{x^2+1}\right) = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} x \ln(x) = 0 \text{ باستعمال النهاية الخاصة : } \lim_{x \rightarrow 0^+} x \ln(x) - x = 0 - 0 = 0$$

2

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} x^2 \ln(x) + \sqrt{x} \ln(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} x \times [x \ln(x)] + \sqrt{x} \ln(\sqrt{x^2}) = \lim_{x \rightarrow 0^+} x \times [x \ln(x)] + 2\sqrt{x} \ln(\sqrt{x}) = 0 \times 0 + 2 \times 0 = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \ln(x) \ln(x+1) = \lim_{x \rightarrow 0^+} x \ln(x) \frac{\ln(x+1)}{x} = 0 \times 1 = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\ln(x) - \ln(2)}{x - 2} = \ln'(2) = \frac{1}{2}$$

تمرين 6 :

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x^2+1)}{\ln(x)} &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln\left(x^2\left(1+\frac{1}{x^2}\right)\right)}{\ln(x)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x^2) + \ln\left(1+\frac{1}{x^2}\right)}{\ln(x)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2\ln(x) + \ln\left(1+\frac{1}{x^2}\right)}{\ln(x)} \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} 2 + \frac{\ln\left(1+\frac{1}{x^2}\right)}{\ln(x)} = 2 \quad \left(\frac{0}{+\infty} \rightarrow 0 \right) \end{aligned}$$

$$\left(\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x+3}{x+5} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x}{x} = 2 \text{ لأن} \right), \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln(2x+3) - \ln(x+5) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln\left(\frac{2x+3}{x+5}\right) = \ln(2)$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln(2x^3+2x+1) - 3\ln(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln(2x^3+2x+1) - \ln(x^3) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln\left(\frac{2x^3+2x+1}{x^3}\right) = \ln(2)$$

$$\left(\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x^3+2x+1}{x^3} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x^3}{x^3} = 2 \text{ لأن} \right)$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln(x)}{\sqrt{x}-1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln(x)}{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+1)} \times (\sqrt{x}+1) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln(x)}{x-1} \times (\sqrt{x}+1) = 1 \times 2 = 2$$

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} x \ln(x^3+x) = \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} x \ln(x(x^2+1)) = \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} x \ln(x) + x \ln(x^2+1) = 0 + 0 \times \ln(1) = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2\ln(x)}{3+\ln(x)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2\ln(x)}{\ln(x)\left(\frac{3}{\ln(x)}+1\right)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2}{\frac{3}{\ln(x)}+1} = \frac{2}{0+1} = 2$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{\ln(x+1)} - \sqrt{\ln(x)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x+1) - \ln(x)}{\sqrt{\ln(x+1)} + \sqrt{\ln(x)}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln\left(\frac{x+1}{x}\right)}{\sqrt{\ln(x+1)} + \sqrt{\ln(x)}} = 0 \quad \left(\frac{\ln(1)}{+\infty} = \frac{0}{+\infty} = 0 \right)$$

🌟 لاحظ من خلال هذه الأمثلة أنه لا توجد طريقة محددة للتعامل مع نهايات دالة اللوغاريتم، عليك محاولة استثمار الأفكار من كل نهاية

رياضيات النجاح أذ سمير لخريسي