.01

01. نعبر بدلالة $\ln 2$ و $\ln 5$ عن ما يلي : $\ln 1000$ ؛ $\ln\frac{8}{25}$ و $\ln 0,16$.

- $\ln 1000 = \ln(10)^3 = 3\ln(2\times5) = 3\ln 2 + 3\ln 5$.
- $\ln\frac{8}{25} = \ln\frac{2^3}{5^2} = 3\ln 2 - 2\ln 5$.
- $\ln 0,16 = \ln 16\times10^{-2} = \ln 16 - 2\ln 10 = \ln 2^4 - 2(\ln 2 + \ln 5) = 4\ln 2 - 2\ln 2 - 2\ln 5 = 2\ln 2 - 2\ln 5$.

02. نبسط ما يلي: $A = \ln\sqrt{5} + \ln\frac{1}{25} - \ln 5$. $B = \ln\left(7+3\sqrt{2}\right)^{2016} + \ln\left(7-3\sqrt{2}\right)^{2016}$. $C = \ln e^3 + \ln\frac{1}{e}$.

- $A = \ln\sqrt{5} + \ln\frac{1}{25} - \ln 5 = \ln 5^{\frac{1}{2}} - \ln 25 - \ln 5 = \frac{1}{2}\ln 5 - 2\ln 5 - \ln 5 = -\frac{5}{2}\ln 5$.
- $B = \ln\left(7+3\sqrt{2}\right)^{2016} + \ln\left(7-3\sqrt{2}\right)^{2016} = 2016\ln\left(7+3\sqrt{2}\right) + 2016\ln\left(7-3\sqrt{2}\right)$

  $= 2016\ln\left[\left(7+3\sqrt{2}\right)\left(7-3\sqrt{2}\right)\right] = 2016\ln(49-18) = 2016\ln 31$
- $C = \ln e^3 + \ln\frac{1}{e} = 3\ln e - \ln e = 3\times1 - 1 = 2$.

03. بدون استعمال المحسبة قارن العددين : $a = 5\ln 2$ و $b = 2\ln 5$.

لدينا : $a = 5\ln 2 = \ln 2^5 = \ln 32$ و $b = 2\ln 5 = \ln 5^2 = \ln 25$ ومنه : $25 < 32$ إذن : $\ln 25 < \ln 32$

خلاصة : $a < b$.

.02

حدد حيز تعريف الدالة f في كل حالة من الحالات التالية :

01. ...

- $f(x) = \ln(x+5) + \ln(3-x)$

  $x \in D_f \Leftrightarrow x+5>0$ و $3-x>0$

  $\Leftrightarrow x>-5$ و $3>x$

  $\Leftrightarrow x \in \left]-5;3\right[$

  خلاصة : مجموعة تعريف f هي : $D_f = \left]-5;3\right[$

- $f(x) = \ln(x^2-9) - \ln(-x)$

  $x \in D_f \Leftrightarrow x^2-9>0$ و $-x>0$

  $\Leftrightarrow (x-3)(x+3)>0$ و $x<0$

  $\Leftrightarrow x \in \left]-\infty;-3\right[\cup \left]3;+\infty\right[$ و $x<0$

  $\Leftrightarrow x \in \left]-\infty;-3\right[$

خلاصة : مجموعة تعريف f هي : $D_f =]-\infty;-3[$

- $f(x)=\ln|x-2|+\sqrt{x-1}$

$x\in D_f \Leftrightarrow x-2\neq 0$ و $x-1\geq 0$

$\Leftrightarrow x\neq 2$ و $x-1\geq 0$

$\Leftrightarrow x\in [1;2[\cup]2;+\infty[$

خلاصة : مجموعة تعريف f هي : $D_f=[1;2[\cup]2;+\infty[$

- $f(x)=\ln(x^2-5x+6)$

$x\in D_f \Leftrightarrow x^2-5x+6>0$

$\Leftrightarrow (x-2)(x-3)>0$

$\Leftrightarrow x\in]-\infty;2[\cup]3;+\infty[$

$\Leftrightarrow x\in]-\infty;2[\cup]3;+\infty[$

خلاصة : مجموعة تعريف f هي : $D_f=]-\infty;2[\cup]3;+\infty[$

02...

- $f(x)=\ln\sqrt{\dfrac{2x-8}{x+3}}$

$x\in D_f \Leftrightarrow \dfrac{2x-8}{x+3}>0$ و $x+3\neq 0$

$\Leftrightarrow (2x-8)(x+3)>0$ و $x\neq -3$

$\Leftrightarrow x\in]-\infty;-3[\cup]4;+\infty[$ و $x\neq -3$

$\Leftrightarrow x\in]-\infty;-3[\cup]4;+\infty[$

خلاصة : مجموعة تعريف f هي : $D_f=]-\infty;-3[\cup]4;+\infty[$

- $f(x)=\dfrac{\ln x}{\sqrt{x-2}}$

$x\in D_f \Leftrightarrow x-2>0$ و $x>0$

$\Leftrightarrow x>2$ و $x>0$

$\Leftrightarrow x>2$

$\Leftrightarrow x\in]2;+\infty[$

خلاصة : مجموعة تعريف f هي : $D_f=]2;+\infty[$

- $f(x)=5x^2+\ln\dfrac{2x-8}{x+3}$

$x\in D_f \Leftrightarrow \dfrac{2x-8}{x+3}>0$ و $x+3\neq 0$

$\Leftrightarrow (2x-8)(x+3)>0$ و $x\neq -3$

$\Leftrightarrow x\in]-\infty;-3[\cup]4;+\infty[$ و $x\neq -3$

$\Leftrightarrow x\in]-\infty;-3[\cup]4;+\infty[$

خلاصة : مجموعة تعريف f هي : $D_f =]-\infty;-3[\cup]4;+\infty[$

- $f(x)=\ln\left(\frac{4-x^2}{x}\right)$

$x\in D_f \Leftrightarrow \frac{4-x^2}{x}>0$ و $x\neq 0$

$\Leftrightarrow x(2-x)(2+x)>0$ و $x\neq 0$

$\Leftrightarrow x\in]-2;2[$ و $x\neq 0$

$\Leftrightarrow x\in]-2;0[\cup]0;2[$

خلاصة : مجموعة تعريف f هي : $D_f =]-2;0[\cup]0;2[$

- $f(x)=\frac{\sqrt{x-2}}{3-\ln x}$

$x\in D_f \Leftrightarrow x-2\geq 0$ و $3-\ln x\neq 0$ و $x>0$

$\Leftrightarrow x\geq 2$ و $\ln x\neq 3$ و $x>0$

$\Leftrightarrow x\geq 2$ و $\ln x\neq \ln e^3$

$\Leftrightarrow x\geq 2$ و $x\neq e^3$

$\Leftrightarrow x\in [2;e^3[\cup]e^3;+\infty[$

خلاصة : مجموعة تعريف f هي : $D_f =]2;e^3[\cup]e^3;+\infty[$

.03

حدد مجموعة تعريف ثم حل المعادلة أو المتراجحة او النظمة التالية :

.01 ؛؛ $(2+x)\ln(x-3)=0$

- $.\ln(x+1)-\ln(x-2)=0$

$x\in D_f \Leftrightarrow x+1>0$ و $x-2>0$

$\Leftrightarrow x>-1$ و $x>2$

$\Leftrightarrow x\in]2;+\infty[$

خلاصة : مجموعة تعريف المعادلة هي : $D_f =]2;+\infty[$

نحل المعادلة على $D_f =]2;+\infty[$

لدينا : $\ln(x+1)-\ln(x-2)=0 \Leftrightarrow \ln(x+1)=\ln(x-2)$

$\Leftrightarrow x+1=x-2$

$\Leftrightarrow 1=-2$

خلاصة : مجموعة حلول المعادلة هي : $S=\varnothing$

- $-3+\ln(x+1)=0$.

$x\in D_f \Leftrightarrow x+1>0$

$\Leftrightarrow x>-1$

$\Leftrightarrow x\in]-1;+\infty[$

خلاصة : مجموعة تعريف المعادلة هي : $D_f=]-1;+\infty[$

نحل المعادلة على $D_f=]-1;+\infty[$

لدينا : $-3+\ln(x+1)=0 \Leftrightarrow \ln(x+1)=3$

$\Leftrightarrow \ln(x+1)=\ln e^3$

$\Leftrightarrow x+1=e^3$

$\Leftrightarrow x=e^3-1\in D_f=]-1;+\infty[$

خلاصة : مجموعة حلول المعادلة هي : $S=\{e^3-1\}$

- $\ln x+\ln(x-3)=2\ln 2$.

$x\in D_f \Leftrightarrow x>0$ و $x-3>0$

$\Leftrightarrow x>0$ و $x>3$

$\Leftrightarrow x\in]3;+\infty[$

خلاصة : مجموعة تعريف المعادلة هي : $D_f=]3;+\infty[$

نحل المعادلة على $D_f=]3;+\infty[$

لدينا : $\ln x+\ln(x-3)=2\ln 2 \Leftrightarrow \ln x(x-3)=\ln 2^2$

$\Leftrightarrow x(x-3)=4$

$\Leftrightarrow x^2-3x-4=0$

$\Leftrightarrow x=4\in D_f=]3;+\infty[$ أو $x=-1\notin D_f=]3;+\infty[$

خلاصة : مجموعة حلول المعادلة هي : $S=\{4\}$

- $(2+x)\ln(x-3)=0$.

$x\in D_f \Leftrightarrow x-3>0$

$\Leftrightarrow x>3$

$\Leftrightarrow x\in]3;+\infty[$

خلاصة : مجموعة تعريف المعادلة هي : $D_f=]3;+\infty[$

نحل المعادلة على $D_f=]3;+\infty[$

لدينا : $(2+x)\ln(x-3)=0 \Leftrightarrow 2+x=0$ أو $\ln(x-3)=0$

$\Leftrightarrow x=-2$ أو $\ln(x-3)=\ln 1$

$\Leftrightarrow x=-2$ أو $x-3=1$

$\Leftrightarrow x=-2 \notin D_f =]3;+\infty[$ أو $x=4 \in D_f =]3;+\infty[$

خلاصة : مجموعة حلول المعادلة هي : $S=\{4\}$

.02 ...

- $\ln x - 4 \le 0$

: مجموعة تعريف المتراجحة

$x \in D_f \Leftrightarrow x>0$

$\Leftrightarrow x \in]0;+\infty[$

خلاصة : مجموعة تعريف المتراجحة هي : $D_f =]0;+\infty[$

نحل المتراجحة على $D_f =]0;+\infty[$

لدينا :

$\ln x - 4 \le 0 \Leftrightarrow \ln x \le \ln 4$

$\Leftrightarrow x \le 4$

$\Leftrightarrow x \in]0;4[\quad ; \quad (x \in D_f =]0;+\infty[)$

خلاصة : مجموعة حلول المتراجحة هي : $S=]0;4[$

- $.\ln(2+5x)-\ln(x+6)\le 0$

$x \in D_f \Leftrightarrow 2+5x>0$ و $x+6>0$

$\Leftrightarrow x>-\frac{2}{5}$ و $x>-6$

$\Leftrightarrow x \in \left]-\frac{2}{5};+\infty\right[$

خلاصة : مجموعة تعريف المتراجحة هي : $D_f = \left]-\frac{2}{5};+\infty\right[$

نحل المتراجحة على $D_f = \left]-\frac{2}{5};+\infty\right[$

لدينا :

$\ln(2+5x)-\ln(x+6)\le 0 \Leftrightarrow \ln(2+5x)\le \ln(x+6)$

$\Leftrightarrow 2+5x \le x+6$

$\Leftrightarrow 4x \le 4$

$\Leftrightarrow x \le 1$

$\Leftrightarrow x \in \left]-\frac{2}{5};1\right] \quad ; \quad \left(x \in D_f = \left]-\frac{2}{5};+\infty\right[\right)$

خلاصة : مجموعة حلول المتراجحة هي : $S=\left]-\frac{2}{5};1\right]$

- $\ln(x^2-8) \leq \ln x + \ln 2$

$x \in D_f \Leftrightarrow x^2-8>0$ و $x>0$

$\Leftrightarrow (x-\sqrt{8})(x+\sqrt{8})>0$ و $x>0$

$\Leftrightarrow x \in]-\infty;-\sqrt{8}[\cup]\sqrt{8};+\infty[$ و $x>0$

خلاصة : مجموعة تعريف المتراجحة هي : $D_f =]\sqrt{8};+\infty[$

نحل المتراجحة على $D_f =]\sqrt{8};+\infty[$

لدينا :

$$\ln(x^2-8) \leq \ln x + \ln 2 \Leftrightarrow \ln(x^2-8) \leq \ln(2x)$$
$$\Leftrightarrow x^2-8 \leq 2x$$
$$\Leftrightarrow x^2-2x-8 \leq 0$$
$$\Leftrightarrow (x-4)(x+2) \leq 0$$
$$\Leftrightarrow x \in]-2;4[\quad ; \quad \left(x \in D_f =]\sqrt{8};+\infty[\right)$$
$$\Leftrightarrow x \in]\sqrt{8};4[\quad ; \quad \left(x \in D_f =]\sqrt{8};+\infty[\right)$$

خلاصة : مجموعة حلول المتراجحة هي : $S =]\sqrt{8};4[$

- $\ln^2 x + \ln x - 2 \leq 0$

$x \in D_f \Leftrightarrow \; x>0$

خلاصة : مجموعة تعريف المتراجحة هي : $D_f =]0;+\infty[$

نحل المتراجحة على $D_f =]0;+\infty[$

لدينا :

$$\ln^2 x + \ln x - 2 \leq 0 \Leftrightarrow \ln^2 x - 1 + \ln x - 1 \leq 0$$
$$\Leftrightarrow (\ln x - 1)(\ln x + 1) + \ln x - 1 \leq 0$$
$$\Leftrightarrow (\ln x - 1)(\ln x + 2) \leq 0$$

x	0		e^{-2}		e		$+\infty$
$\ln x - 1 = \ln x - \ln e$		$-$		$-$	0	$+$	
$\ln x + 2 = \ln x + \ln e^2$		$-$	0	$+$		$+$	
$(\ln x - 1)(\ln x + 2)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

خلاصة : مجموعة حلول المتراجحة هي : $S =]0;e^{-2}[\cup]e;+\infty[$

- $(2+x)\ln(x-3) < 0$

$x \in D_f \Leftrightarrow \; x-3>0$

$\Leftrightarrow x>3$

$\Leftrightarrow x \in]3;+\infty[$

خلاصة : مجموعة تعريف المتراجحة هي : $D_f =]3;+\infty[$

نحل المتراجحة على $D_f =]3;+\infty[$

لدينا :

$$\ln(x-3) \geq 0 \Leftrightarrow \ln(x-3) \geq \ln 1$$
$$\Leftrightarrow x-3 \geq 1$$
$$\Leftrightarrow x \geq 4$$

x	-2		3		4		$+\infty$
$2+x$	0	+	||	+		+	
$\ln(x-3)$			||	$-$	0	+	
$(2+x)\ln(x-3)$			||	$-$	0	+	

خلاصة : مجموعة حلول المعادلة هي : $S =]3;4[$

.03 نحل النظمة : $\begin{cases} 2\ln x - 3\ln y = 6 \\ 5\ln x + 2\ln y = \dfrac{1}{2} \end{cases}$

نضع $\ln x = t$ و $\ln y = z$ ومنه : $\left.\begin{array}{l} 2\ln x - 3\ln y = 6 \\ 5\ln x + 2\ln y = \dfrac{1}{2} \end{array}\right\} \Leftrightarrow \begin{cases} 2t - 3z = 6 \\ 5t + 2z = \dfrac{1}{2} \end{cases}$

محددة النظمة هي : $\Delta = \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 5 & 2 \end{vmatrix} = 19$ ومنه : $\Delta \neq 0$ إذن النظمة هي نظمة كرامير Cramer لها حل وحيد :

$$t = \frac{\Delta_t}{\Delta} = \frac{\begin{vmatrix} 6 & -3 \\ \frac{1}{2} & 2 \end{vmatrix}}{19} = \frac{\frac{27}{2}}{19} = \frac{27}{38} \quad \text{و} \quad z = \frac{\Delta_z}{\Delta} = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 6 \\ 5 & \frac{1}{2} \end{vmatrix}}{19} = \frac{-29}{19}$$

أي : $\ln x = t = \dfrac{27}{38}$ و $\ln y = z = \dfrac{-29}{19}$

و بالتالي : $x = e^{\frac{27}{38}}$ و $y = e^{\frac{-29}{19}}$.

خلاصة : مجموعة حلول النظمة هي : $S = \left\{\left(e^{\frac{27}{38}}; e^{\frac{-29}{19}}\right)\right\}$ أو أيضا حل النظمة هو الزوج $\left(e^{\frac{27}{38}}; e^{\frac{-29}{19}}\right)$.

.04

نحسب النهايات التالية:

.01 ... ؛ $\lim\limits_{x\to+\infty} x\ln\left(1+\dfrac{1}{x}\right)$ (ضع $X = \dfrac{1}{x}$)

- $\lim\limits_{x\to 0^+} 2x + \ln x = -\infty$ لأن : $\lim\limits_{x\to 0^+} 2x = 0$ و $\lim\limits_{x\to 0^+} \ln x = -\infty$.

- $\lim\limits_{x\to+\infty} 2x-\ln x=\lim\limits_{x\to+\infty} x\left(2-\frac{\ln x}{x}\right)=+\infty$ لأن : $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x}=0$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} x=+\infty$.

- $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{\sqrt{x}}=\lim\limits_{x\to+\infty} 2\frac{\ln\sqrt{x}}{\sqrt{x}}=\lim\limits_{t\to+\infty}\frac{\ln t}{t}=0$ مع $t=\sqrt{x}$ و $x\to+\infty$ فإن $t\to+\infty$.

- $\lim\limits_{x\to0^+}\frac{1}{x}-\ln x=+\infty$ لأن : $\lim\limits_{x\to0^+}-\ln x=+\infty$ و $\lim\limits_{x\to0^+}\frac{1}{x}=+\infty$.

- $\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{x}-\ln x=\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{x}-2\ln\sqrt{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{x}\left(1-2\frac{\ln\sqrt{x}}{\sqrt{x}}\right)=+\infty$ لأن $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\ln\sqrt{x}}{\sqrt{x}}=0$ و $\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{x}=+\infty$.

- $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\ln\sqrt{x}}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{2}\times\frac{\ln x}{x}=0$ لأن : $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x}=0$.

- $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{(x^2-1)\ln x}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x^2-1}{x}\times\ln x=+\infty$ لأن $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x^2-1}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x^2}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}x=+\infty$ و $\lim\limits_{x\to+\infty}\ln x=+\infty$.

- $\lim\limits_{x\to-\infty}\ln\left(\frac{3x+15}{x-2}\right)=\ln 3$ لأن $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{3x+15}{x-2}=\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{3\cancel{x}}{\cancel{x}}=3$.

- $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{2+\ln x}{-1+\ln x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\cancel{\ln x}\left(\frac{2}{\ln x}+1\right)}{\cancel{\ln x}\left(\frac{-1}{\ln x}+1\right)}=1$ لأن : $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{2}{\ln x}=0$.

- نضع $2x=X$ و منه : $x\to0$ فإن $X\to0$ ومنه $\lim\limits_{x\to0}\frac{\ln(1+2x)}{x}=\lim\limits_{X\to0}\frac{\ln(1+X)}{\frac{X}{2}}=\lim\limits_{X\to0}2\times\frac{\ln(1+X)}{X}=2$

لأن $\lim\limits_{X\to0}\frac{\ln(1+X)}{X}=1$.

- نضع $X=\frac{1}{x}$ و منه : $x\to+\infty$ فإن $X\to0^+$ ومنه

$$\lim_{x\to+\infty}x\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)=\lim_{X\to0^+}\frac{1}{X}\ln(1+X)=\lim_{X\to0^+}\frac{\ln(1+X)}{X}=1$$

02.... ؛ $\lim\limits_{x\to3}2x\frac{\ln x-\ln 3}{x-3}$

- $\lim\limits_{|x|\to+\infty}\left[\frac{\ln(x^2+1)}{1+x^3}\right]=\lim\limits_{|x|\to+\infty}\frac{\ln(x^2+1)}{x^2+1}\times\frac{x^2+1}{1+x^3}=0$ لأن $\lim\limits_{|x|\to+\infty}\frac{\ln(x^2+1)}{x^2+1}=\lim\limits_{|t|\to+\infty}\frac{\ln t}{t}=0$ مع $t=x^2+1$ و

$|x|\to+\infty$ فإن $t\to+\infty$ و $\lim\limits_{|x|\to+\infty}\frac{x^2+1}{1+x^3}=\lim\limits_{|x|\to+\infty}\frac{\cancel{x^2}}{x^{\cancel{3}}}=0$.

- $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[x^3-2x-\ln x\right]=\lim\limits_{x\to+\infty}x\left[x^2-2-\frac{\ln x}{x}\right]=+\infty$ لأن : $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x}=0$ و $\lim\limits_{x\to+\infty}x=+\infty$.

- $\lim_{x\to e}\frac{\ln(x)-1}{x-e}$ نضع : $f(x)=\ln x$ ومنه : $f(e)=1$ إذن

$\lim_{x\to e}\frac{\ln(x)-1}{x-e}=\lim_{x\to e}\frac{f(x)-f(e)}{x-e}=f'(e)=(\ln x)'_{x=e}=\left(\frac{1}{x}\right)_{x=e}=\frac{1}{e}$.

- $\lim_{x\to 3}2x\frac{\ln x-\ln 3}{x-3}$ نضع : $f(x)=\ln x$ ومنه : $f(3)=\ln 3$ إذن

$\lim_{x\to 3}\frac{\ln x-\ln 3}{x-3}=\lim_{x\to 3}\frac{f(x)-f(3)}{x-3}=f'(3)=(\ln x)'_{x=3}=\left(\frac{1}{x}\right)_{x=3}=\frac{1}{3}$ و $\lim_{x\to 3}2x=6$

ومنه : $\lim_{x\to 3}2x\frac{\ln x-\ln 3}{x-3}=2\times 3\times\frac{1}{3}=2$

05.

لنعتبر الدالة العددية f المعرفة على $\mathbb{R}^+$ ب : $\begin{cases}f(x)=\dfrac{x+\ln x}{x^2-2\ln x}\ ;\ x>0\\ f(0)=-\dfrac{1}{2}\end{cases}$.

ندرس اتصال الدالة f على يمين $x_0=0$

لدينا : $\lim_{x\to 0^+}f(x)=\lim_{x\to 0^+}\frac{x+\ln x}{x^2-2\ln x}=\lim_{x\to 0^+}\frac{\left(\frac{x}{\ln x}+1\right)\cancel{\ln x}}{\left(\frac{x^2}{\ln x}-2\right)\cancel{\ln x}}=\lim_{x\to 0^+}\frac{\left(\frac{x}{\ln x}+1\right)}{\left(\frac{x^2}{\ln x}-2\right)}=-\frac{1}{2}$ (لأن : $\lim_{x\to 0^+}\frac{x}{\ln x}=\lim_{x\to 0^+}x\times\frac{1}{\ln x}=0$

و ذلك $\lim_{x\to 0^+}\ln x=-\infty\Rightarrow\lim_{x\to 0^+}\frac{1}{\ln x}=0$)

و منه : $\lim_{x\to 0^+}f(x)=-\frac{1}{2}=f(0)$.

خلاصة : الدالة f متصلة على يمين $x_0=0$

06.

لنعتبر الدالة العددية f المعرفة على $\mathbb{R}^+$ ب : $\begin{cases}f(x)=x\ln(x^2)\text{-}2x\ ;\ x\neq 0\\ f(0)=0\end{cases}$.

01. نبين أن : الدالة f متصلة على $\mathbb{R}$.

لدينا :

- الدوال : $x\mapsto \ln x\ ;\ x\mapsto x^2\ ;\ x\mapsto 2x\ ;\ x\mapsto x$ متصلة على $\mathbb{R}^*$ و منه الدالة f متصلة على $\mathbb{R}^*$ (مجموع وجداء و مركبة دوال متصلة على $\mathbb{R}^*$.
- ندرس اتصال الدالة f في $x_0=0$

$\lim_{x\to 0^+}f(x)=\lim_{x\to 0^+}x\ln(x^2)\text{-}2x=\lim_{x\to 0^+}x\ln(|x|^2)\text{-}2x=\lim_{x\to 0^+}2x\ln(|x|)\text{-}2x=0$ (لأن $\lim_{x\to 0^+}x\ln x=0$)

و منه : $\lim_{x\to 0^+} f(x) = 0 = f(0)$

و منه : الدالة f متصلة في $x_0 = 0$

خلاصة : الدالة f متصلة على $\mathbb{R}^*$ ومتصلة في 0 و بالتالي الدالة f متصلة على $\mathbb{R}$.

.02 ندرس اشتقاق الدالة f في $x_0 = 0$ ثم أعط تأويل هندسي للنتيجة المحصل عليها .

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{x\ln(x^2)\text{-}2x}{x} = \lim_{x\to 0}\ln(x^2)\text{-}2 = -\infty \notin \mathbb{R}$$

خلاصة : الدالة f غير قابلة للاشتقاق في النقطة $x_0 = 0$ و منه منحنى الدالة f يقبل مماس موازي للمحور الأراتيب في النقطة $x_0 = 0$.

.07

لنعتبر الدالة العددية f المعرفة على $\mathbb{R}^+$ ب : $\begin{cases} f(x) = \dfrac{x\ln x}{x-1} \ ; \ x \in]0;+\infty[\setminus \{1\} \\ f(1) = 0 \end{cases}$.

.01 ندرس اتصال الدالة f في $x_0 = 1$.

لدينا : $\lim_{x\to 1} f(x) = \lim_{x\to 1} x \times \frac{\ln x}{x-1} = 1$ لأن $\lim_{x\to 1}\frac{\ln x}{x-1} = 1$ و منه $\lim_{x\to 1} f(x) \neq f(0)$.

خلاصة : الدالة f غير متصلة في $x_0 = 1$

.02 ماذا يمكن أن نقول عن اشتقاق f في $x_0 = 1$.

بما أن الدالة f غير متصلة في $x_0 = 1$ فإن الدالة f غير قابلة الاشتقاق f في $x_0 = 1$.

.08

أحسب مشتقة f في كل حالة من الحالات التالية:

.01 ...

- $f'(x) = \left[\ln(6-5x) + \frac{3}{x}\right]' = \frac{(6-5x)'}{6-5x} - \frac{3}{x^2} = \frac{-5}{6-5x} - \frac{3}{x^2}$.
- $f'(x) = \left(\frac{2}{\ln x}\right)' = 2\times\frac{-(\ln x)'}{(\ln x)^2} = -2\times\frac{1}{x(\ln x)^2} = \frac{-2}{x(\ln x)^2}$.
- $f'(x) = (\ln^3 x)' = 3(\ln x)^2(\ln x)' = 3(\ln x)^2 \times \frac{1}{x}$.
- $f'(x) = (\ln(x^3+4))' = (x^3+4)' \times \ln'(x^3+4) = 3x^2 \times \frac{1}{x^3+4}$.
- $f'(x) = (\ln|x^2-3x|)' = \frac{(x^2-3x)'}{x^2-3x} = \frac{2x-3}{x^2-3x}$

.02

- $f'(x) = \left[(x^2-1)\ln x\right]' = 2x\ln x + (x^2-1)(\ln x)' = 2x\ln x + (x^2-1)\times\frac{1}{x}$.

- $$f'(x)=\left[\frac{\ln x}{x^2+1}\right]'=\frac{(\ln x)'(x^2+1)-(\ln x)(x^2+1)'}{(x^2+1)^2}=\frac{\frac{(x^2+1)}{x}-(\ln x)(2x+1)}{(x^2+1)^2}$$
$$=\frac{x^2+1-(\ln x)(2x+1)x}{x(x^2+1)^2}=\frac{x^2+1-(\ln x)(2x^2+x)}{x(x^2+1)^2}$$

- $$f'(x)=\left(3x^2+\ln\frac{2x-8}{x+3}\right)'=(3x^2)'+\left(\frac{2x-8}{x+3}\right)'=6x\times\frac{\begin{vmatrix}2&-8\\1&3\end{vmatrix}}{(x+3)^2}=\frac{6x\times 14}{(x+3)^2}.$$

- $$f'(x)=\left(\frac{2\ln x+3}{\ln x-7}\right)'=\frac{(2\ln x+3)'(\ln x-7)-(2\ln x+3)(\ln x-7)'}{(\ln x-7)^2}$$
$$=\frac{\frac{2}{x}(\ln x-7)-(2\ln x+3)\times\frac{1}{x}}{(\ln x-7)^2}=\frac{2(\ln x-7)-(2\ln x+3)}{x(\ln x-7)^2}=\frac{-17}{x(\ln x-7)^2}$$

طريقة 2 :

$$f'(x)=\left(\frac{2\ln x+3}{\ln x-7}\right)'=\frac{\begin{vmatrix}2&3\\1&-7\end{vmatrix}}{(\ln x-7)^2}\times(\ln x)'=\frac{-17}{(\ln x-7)^2x}.$$

- $$f'(x)=\left(\frac{x-\ln x}{x^2}\right)'=\frac{\left(1-\frac{1}{x}\right)x^2-(x-\ln x)\times 2x}{x^4}=\frac{x^2-x-2x^2+2x\ln x}{x^4}=\frac{-x^2-x+2x\ln x}{x^4}$$

.03 $f(x)=\ln(\ln x)$

- $$f'(x)=\left[\ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)\right]'=\frac{\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)'}{x+\sqrt{x^2+1}}=\frac{1+\frac{(x^2+1)'}{2\sqrt{x^2+1}}}{x+\sqrt{x^2+1}}$$
$$=\frac{2\sqrt{x^2+1}+2x}{\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)\left(2\sqrt{x^2+1}\right)}=\frac{\cancel{2}\cancel{\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)}}{\cancel{\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)}\left(\cancel{2}\sqrt{x^2+1}\right)}=\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$$

- $$f'(x)=\left[\ln(x^2-5x+1)\right]'=\frac{(x^2-5x+1)'}{x^2-5x+1}=\frac{2x-5}{x^2-5x+1}.$$

- $$f'(x)=\left[\left[\ln(6-5x)\right]^2\right]'=2\left[\ln(6-5x)\right]'\left[\ln(6-5x)\right]=2\times\frac{-5x}{6-5x}\times\left[\ln(6-5x)\right].$$

- $$f'(x)=(\ln(\ln x))'=\frac{(\ln x)'}{\ln x}=\frac{1}{x\ln x}$$

.09

نحدد دالة أصلية على المجال I للدوال الأصلية التالية :

- $f(x)=x^2-5x+\frac{1}{x}$; $I=]0,+\infty[$. دالة أصلية على المجال I هي : $F(x)=\frac{1}{3}x^3-\frac{5}{2}x^2+\ln x$ لأن $\ln|x|=\ln x$.
- $f(x)=x^2-\frac{1}{\sqrt{x}}+\frac{5}{x}+\frac{3}{x^2}$; $I=]0,+\infty[$. دالة أصلية على المجال I هي : $F(x)=\frac{1}{3}x^3-2\sqrt{x}+5\ln x-\frac{3}{x}$ لأن : $\frac{1}{\sqrt{x}}=x^{-\frac{1}{2}}$.
- $f(x)=\frac{5}{x+1}$; $I=]-\infty,-1[$. دالة أصلية على المجال I هي : $F(x)=5\ln|x+1|=5\ln(-x-1)$ لأن $x\in I=]-\infty,-1[$.

.10

لنعتبر الدالة العددية f المعرفة على $\mathbb{R}^{+*}$ ب : $f(x)=x+\ln x$.

.01 نبين أن : الدالة f تحقق تقابل من $\mathbb{R}^{+*}$ إلى مجال J يتم تحدده .

لدينا :

- الدالة f متصلة على $\mathbb{R}^{+*}$ لأنها مجموع دالتين متصلتين على $\mathbb{R}^{+*}$.
- الدالة f قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}^{+*}$ لأنها مجموع دالتين قابلتين للاشتقاق على $\mathbb{R}^{+*}$ مع $f'(x)=1+\frac{1}{x}>0$ لأن $x\in\mathbb{R}^{+*}$ و بالتالي الدالة f تزايدية قطعا على $\mathbb{R}^{+*}$.
- لدينا : $J=f(I)=f(]0;+\infty[)=]\lim_{x\to0^+}f(x);\lim_{x\to+\infty}f(x)[=]-\infty;+\infty[$.

خلاصة : الدالة f تحقق تقابل من $\mathbb{R}^{+*}$ إلى مجال $J=]-\infty;+\infty[$.

.02 نعلل أن المعادلة $x+\ln x=2005$ تقبل حل وحيد α من $]0;+\infty[$ و $1997\le\alpha\le1998$ (نأخذ $\ln1997\approx\ln1998\approx7,6$)

لدينا : $2005<f(1998)\approx1998+7,6$; $f(1997)\approx1997+7,6<2005$ و منه $f(1997)<2005<f(1998)$

من خلال مبرهنة المتوسط و التقابل يوجد عدد وحيد α من $]1997;1998[$ حيث $f(\alpha)=2005$.

.11

.01 نبسط : $\log_3(81)=\log_3(3^4)=4\log_3(3)=4\times1=4$.

.02 نحدد العدد x حيث اللوغاريتم هذا العدد في الأساس 4 هو -2 أي

$$\log_4(x)=-2\Leftrightarrow\frac{\ln x}{\ln 4}=-2$$
$$\Leftrightarrow\ln x=-2\ln 4$$
$$\Leftrightarrow\ln x=\ln 4^{-2}$$

$$\Leftrightarrow x = 4^{-2} = \frac{1}{16}$$

خلاصة : العدد هو $x = \frac{1}{16}$.

طريقة 2 :

$$\log_4(x) = -2 \Leftrightarrow \exp_4(\log_4(x)) = \exp_4(-2)$$
$$\Leftrightarrow x = 4^{-2}$$
$$\Leftrightarrow x = \frac{1}{16}$$

.03 نحدد حيز تعريف الدالة f : $f(x) = \log_2(x+1)$ ؛ $f(x) = \sqrt{x} + \log_3(x^2-1)$ $\log_x(10)$.

- $f(x) = \log_2(x+1)$

$$x \in D_f \Leftrightarrow x+1 > 0$$
$$\Leftrightarrow x > -1$$

خلاصة : حيز تعريف الدالة f هو : $D_f =]-1;+\infty[$

- $f(x) = \sqrt{x} + \log_3(x^2-1)$

$$x \in D_f \Leftrightarrow x \geq 0 \text{ و } x^2 - 1 > 0$$
$$\Leftrightarrow x \geq 0 \text{ و } x \in]-\infty;-1[\cup]1;+\infty[$$
$$\Leftrightarrow x \in]1;+\infty[$$

خلاصة : حيز تعريف الدالة f هو : $D_f =]1;+\infty[$

- $f(x) = \log_x(10)$

نلاحظ أن : $f(x) = \log_x(10) = \frac{\ln 10}{\ln x}$

و منه : $x \in D_f \Leftrightarrow x > 0 \text{ و } \ln x \neq 0$

$$\Leftrightarrow x > 0 \text{ و } x \neq 1$$
$$\Leftrightarrow x \in]0;1[\cup]1;+\infty[$$

خلاصة : حيز تعريف الدالة f هو : $D_f =]0;1[\cup]1;+\infty[$

ملحوظة : اللوغاريتم الذي أساسه a يشترط أن $a \in]0;1[\cup]1;+\infty[$

.04 أحسب الدالة المشتقة للدالة f في الحالات التالية :

- $f(x) = \log_5(x^2+1)$

$$f'(x) = \left[\log_5(x^2+1)\right]'$$
$$= \left[\frac{\ln(x^2+1)}{\ln 5}\right]'$$

$$= \frac{1}{\ln 5} \times \left[\ln\left(x^2+1\right)\right]'$$

$$= \frac{1}{\ln 5} \times \left[\frac{\left(x^2+1\right)'}{\left(x^2+1\right)}\right]$$

$$= \frac{1}{\ln 5} \times \frac{2x}{\left(x^2+1\right)}$$

خلاصة : الدالة المشتقة للدالة f هي : $f'(x) = \left[\log_5\left(x^2+1\right)\right]' = \frac{1}{\ln 5} \times \frac{2x}{\left(x^2+1\right)}$

- $f(x) = \log_3\left(\sqrt{x^2-2x-3}\right)$

$$f'(x) = \left[\log_3\left(\sqrt{x^2-2x-3}\right)\right]'$$

$$= \left(\frac{\ln\left(\sqrt{x^2-2x-3}\right)}{\ln 3}\right)'$$

$$= \frac{1}{\ln 3}\left(\ln\left(\sqrt{x^2-2x-3}\right)\right)'$$

$$= \frac{1}{\ln 3} \times \frac{\left(\sqrt{x^2-2x-3}\right)'}{\sqrt{x^2-2x-3}}$$

$$= \frac{1}{\ln 3} \times \frac{\left(x^2-2x-3\right)'}{2\sqrt{x^2-2x-3}} \times \frac{1}{\sqrt{x^2-2x-3}}$$

$$= \frac{1}{\ln 3} \times \frac{2x-2}{2\sqrt{x^2-2x-3}} \times \frac{1}{\sqrt{x^2-2x-3}}$$

$$= \frac{1}{\ln 3} \times \frac{x-1}{x^2-2x-3}$$

خلاصة : الدالة المشتقة للدالة f هي : $f'(x) = \left[\log_3\left(\sqrt{x^2-2x-3}\right)\right]' = \frac{1}{\ln 3} \times \frac{x-1}{x^2-2x-3}$

- $f(x) = \log_2\left(\tan\left(\frac{x}{2}\right)\right)$

$$f'(x) = \left[\log_2\left(\tan\left(\frac{x}{2}\right)\right)\right]'$$

$$= \left[\frac{\ln\left(\tan\left(\frac{x}{2}\right)\right)}{\ln 2}\right]'$$

$$= \frac{1}{\ln 2} \times \left[\ln\left(\tan\left(\frac{x}{2}\right)\right)\right]'$$

$$= \frac{1}{\ln 2} \times \left[\frac{\left(\tan\left(\frac{x}{2}\right)\right)'}{\tan\left(\frac{x}{2}\right)} \right]$$

$$= \frac{1}{\ln 2} \times \frac{1+\frac{1}{2}\tan^2\left(\frac{x}{2}\right)}{\tan\left(\frac{x}{2}\right)}$$

$$= \frac{1}{2\ln 2} \times \frac{2+\tan^2\left(\frac{x}{2}\right)}{\tan\left(\frac{x}{2}\right)}$$

خلاصة : الدالة المشتقة للدالة f هي : $f'(x) = \left[\log_2\left(\tan\left(\frac{x}{2}\right)\right)\right]' = \frac{1}{2\ln 2} \times \frac{2+\tan^2\left(\frac{x}{2}\right)}{\tan\left(\frac{x}{2}\right)}$

.12

نذكر أن : $\log_{10}(x) = \frac{\ln x}{\ln 10}$ و نرمز ل : $\log_{10}(x)$ ب $\log(x)$ و يسمى اللوغاريتم العشري (أي الذي أساسه 10 .

ملحوظة : $\log(1) = 0$ و $\log(10^p) = p$ مع $p \in \mathbb{Z}$.

pH لمحلول معرف بالعلاقة : $pH = -\log\left(\frac{[H_3O^+]}{C_0}\right)$ حيث $[H_3O^+]$ تمثل تركيز أيونات H_3O^+ (ions oxoniom) معبر عنها ب mol / litre و C_0 معبر عنها ب 1 mol / litre .

.01 نحسب pH التي توافق تركيز $[H_3O^+] = 10^{-2} mol / l$.

.02 أحسب التركيز أيونات (ions oxoniom) في محلول حيث pH هو 7 .

.03 كيف يصبح pH عندما التركيز يقسم على 10 ؟ على 100 ؟

.04 ما هو التركيز عندما ينخفظ pH ب 1 ؟ ب 2 ؟

.05 لماذا الكميائيين يستعملن log (اللوغاريتم العشري) بدل ln (اللوغاريتم النبيري) عند حساب pH ؟