



نعتبر الدالة العددية  $f$  للمتغير الحقيقي  $x$  حيث :  $f(x) = \frac{1}{x(1-\ln x)}$

و ليكن  $(\mathcal{C}_f)$  المنحنى الممثل للدالة  $f$  في معلم متعامد منظم  $(O, \vec{i}, \vec{j})$  (الوحدة 2 cm).

I ..

01. نبين أن :  $D_f = ]0; e[ \cup ]e; +\infty[$  (  $D_f$  مجموعة تعريف الدالة  $f$  ) ..... (0.5 ن)

لدينا :  $x \in D_f \Leftrightarrow x > 0$  و  $x(1-\ln x) \neq 0$

$\Leftrightarrow x > 0$  و  $x \neq 0$  و  $1-\ln x \neq 0$

$\Leftrightarrow x > 0$  و  $\ln x \neq \ln e$

$\Leftrightarrow x > 0$  و  $x \neq e$

$\Leftrightarrow x \in ]0; e[ \cup ]e; +\infty[$

خلاصة : مجموعة تعريف الدالة  $f$  هي :  $D_f = ]0; e[ \cup ]e; +\infty[$

02 ..

أ- نحسب :  $\lim_{x \rightarrow e^-} f(x)$  و  $\lim_{x \rightarrow e^+} f(x)$  و أول هندسيا للنتيجتين المتوصل إليهما . ..... (0.75 ن)

$$\lim_{\substack{x \rightarrow e \\ x > e}} 1 - \ln x = 0^- : \text{ لأن } \lim_{\substack{x \rightarrow e \\ x > e}} f(x) = \lim_{\substack{x \rightarrow e \\ x > e}} \frac{1}{x(1-\ln x)} = -\infty \quad \bullet$$

$$\lim_{\substack{x \rightarrow e \\ x < e}} 1 - \ln x = 0^+ : \text{ لأن } \lim_{\substack{x \rightarrow e \\ x < e}} f(x) = \lim_{\substack{x \rightarrow e \\ x < e}} \frac{1}{x(1-\ln x)} = +\infty \quad \bullet$$

• تأويل هندسيا للنتيجتين المتوصل إليهما : منحنى  $f$  يقبل مقارب عمودي هو المستقيم الذي معادلته  $x = e$ .

ب- نحسب :  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$  ثم استنتج أن المنحنى  $(\mathcal{C}_f)$  يقبل مقاربا بجوار  $+\infty$  يتم تحديده. .... (0.5 ن)

$$\lim_{\substack{x \rightarrow e \\ x > e}} 1 - \ln x = -\infty : \text{ لأن } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x(1-\ln x)} = 0 \quad \bullet$$

• نستنتج أن المنحنى  $(\mathcal{C}_f)$  يقبل مقاربا أفقي بجوار  $+\infty$  هو المستقيم الذي معادلته  $y = 0$

ج- نبين أن :  $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} f(x) = +\infty$  ثم أول هندسيا النتيجة (لحساب  $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} f(x)$  لاحظ أن  $x(1-\ln x) = x - x \ln x$  ) ..... (0.5 ن)

$$\text{لدينا : } \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} f(x) = \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} \frac{1}{x(1-\ln x)} = \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} \frac{1}{x - x \ln x} = +\infty \quad \bullet$$

• تأويل هندسيا النتيجة : المنحنى  $(\mathcal{C}_f)$  يقبل مقاربا عمودي هو المستقيم الذي معادلته  $x = 0$ .

03 ...

أ- نبين أن :  $f'(x) = \frac{\ln x}{x^2(1-\ln x)^2}$  لكل  $x$  من  $D_f$  ..... (0.75 ن)



- الدالة العددية  $f$  هي قابلة للاشتقاق على  $D_f$  ( لأنها جداء ومقلوب دوال قابلة للاشتقاق و غير منعدمة على  $D_f$  )

$$f'(x) = \left[ \frac{1}{x(1-\ln x)} \right]' = \frac{-(x(1-\ln x))'}{(x(1-\ln x))^2} = -\frac{1-\ln x + x \times \left(-\frac{1}{x}\right)}{(x(1-\ln x))^2} = \frac{\ln x}{x^2(1-\ln x)^2}$$

• لدينا :  $f'(x) = \frac{\ln x}{x^2(1-\ln x)^2}$  : خلاصة :  $f'(x) = \frac{\ln x}{x^2(1-\ln x)^2}$  لكل  $x$  من  $D_f$ .

- ب-** نبين أن : الدالة  $f$  تناقصية على المجال  $]0;1[$  و تزايدية على كل من المجالين  $[1;e[$  و  $]e;+\infty[$  ..... ( ن 1 )

- ندرس إشارة  $f'$  : إشارة  $f'$  هي إشارة  $\ln x$  على  $D_f$
- على المجال  $]0;1[$  لدينا  $\ln x < 0$  و منه : الدالة  $f$  تناقصية على المجال  $]0;1[$  .
- على كل من المجالين  $[1;e[$  و  $]e;+\infty[$  لدينا  $\ln x \geq 0$  و منه : الدالة  $f$  تزايدية على كل من المجالين  $[1;e[$  و  $]e;+\infty[$

- ج-** نضع جدول تغيرات الدالة  $f$  على  $D_f$  ..... ( 0.25 ن )

x	0	1	e	$+\infty$
f'		-	0	+
f	$+\infty$	$\searrow$	$\nearrow$	0
			1	$-\infty$

.. **II**

- لتكن  $g$  الدالة العددية المعرفة على المجال  $]0;+\infty[$  بما يلي :  $g(x) = 1 - x^2(1 - \ln x)$  .  
و ليكن  $(C_g)$  المنحنى الممثل للدالة  $g$  في معلم متعامد ممنظم ( أنظر الشكل ) .

.. **01**

- أ-** نحدد مبيانيا عدد حلول المعادلة (E) التالية :  $g(x) = 0$  ,  $x \in ]0;+\infty[$  ..... ( 0.5 ن )

- أي نحدد عدد نقاط تقاطع المنحنى و محور الأفاصيل و بالتالي المعادلة لها حلين  
**ب-** نعطي جدول القيم التالية :

x	2,1	2,2	2,3	2,4
g(x)	-0,14	-0,02	0,12	0,28

- بين أن : المعادلة (E) تقبل حلا  $\alpha$  حيث :  $2,2 < \alpha < 2,3$  ..... ( 0.5 ن )

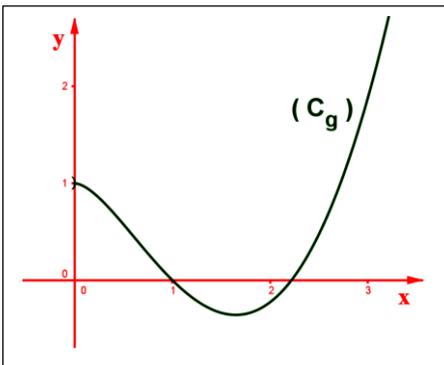
- مبيانيا الدالة  $g$  متصلة على المجال  $[2,2;2,3]$

• من خلال الجدول  $g(2,2) \times g(2,3) = -0,02 \times 0,12 < 0$

- إذن حسب مبرهنة المتوسط يوجد  $\alpha$  من المجال  $]2,2;2,3[$  حيث  $g(\alpha) = 0$

خلاصة : المعادلة (E) تقبل حلا  $\alpha$  حيث :  $2,2 < \alpha < 2,3$

.. **02**





**أ-** نتحقق من أن :  $f(x) - x = \frac{g(x)}{x(1 - \ln x)}$  لكل  $x$  من  $D_f$  ..... (0.25 ن)

$$f(x) - x = \frac{1}{x(1 - \ln x)} - x = \frac{1 - x^2(1 - \ln x)}{x(1 - \ln x)} = \frac{g(x)}{x(1 - \ln x)}$$

**خلاصة :**  $f(x) - x = \frac{g(x)}{x(1 - \ln x)}$  لكل  $x$  من  $D_f$ .

**ب-** نبين أن المستقيم  $(\Delta)$  الذي معادلته  $y = x$  يقطع المنحنى  $(C_f)$  في النقطتين اللتين أفصولهما 1 و  $\alpha$  ..... (0.5 ن)

ندرس تقاطع المستقيم  $(\Delta)$  الذي معادلته  $y = x$  و المنحنى  $(C_f)$  و لهذا نحل المعادلة :  $f(x) = x$  :  $x \in D_f$

$$\text{أو أيضا : } x \in D_f : f(x) - x = 0 \text{ وهذا يكافئ } x \in D_f : \frac{g(x)}{x(1 - \ln x)} = 0 \text{ أي } x \in D_f : g(x) = 0$$

مبيانيا هناك حلين و حسب ما سبق  $g(\alpha) = 0$  و لدينا  $g(1) = 0$  ( بالحساب أو مبيانيا )

**خلاصة :** المستقيم  $(\Delta)$  الذي معادلته  $y = x$  يقطع المنحنى  $(C_f)$  في النقطتين اللتين أفصولهما 1 و  $\alpha$

**ج-** نحدد انطلاقا من  $(C_g)$  ؛ إشارة الدالة  $g$  على المجال  $[1; \alpha]$  و نبين أن  $f(x) - x \leq 0$  لكل  $x$  من  $[1; \alpha]$  ..... (0.5 ن)

• إشارة الدالة  $g$  على المجال  $[1; \alpha]$

على المجال  $]1; \alpha[$   $g(x) < 0$  بالنسبة ل  $g(1) = 0$  و  $g(\alpha) = 0$  و بصفة عامة على المجال  $[1; \alpha]$   $g(x) \leq 0$

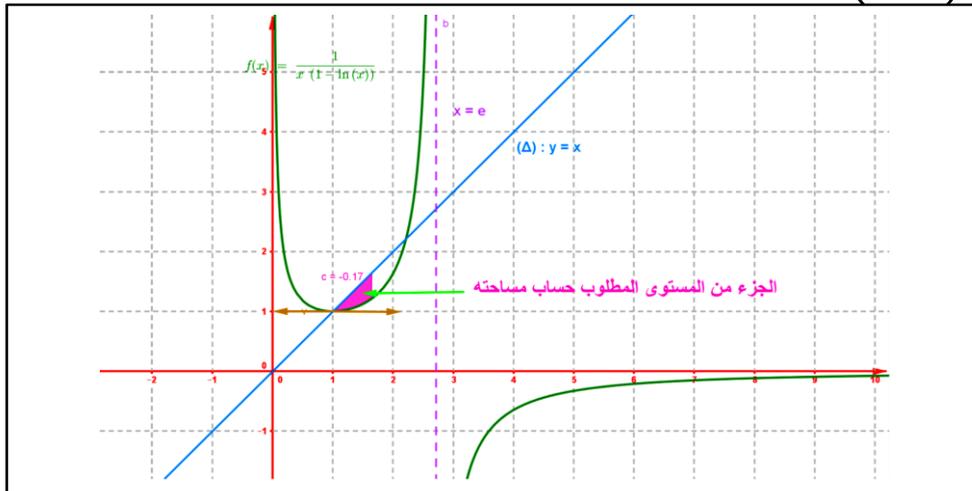
• نبين أن  $f(x) - x \leq 0$  لكل  $x$  من  $[1; \alpha]$  .

على المجال  $[1; \alpha]$  :  $g(x) \leq 0$  و  $f(x) = \frac{1}{x(1 - \ln x)} \geq 1 > 0$  حسب جدول تغيرات  $f$  على المجال  $[1; e[$  و

$$[1; \alpha] \subset [1; e[ \text{ و منه : } f(x) - x = \frac{g(x)}{x(1 - \ln x)} \leq 0 \text{ لكل } x \text{ من } D_f .$$

**خلاصة :**  $f(x) - x = \frac{g(x)}{x(1 - \ln x)} \leq 0$  لكل  $x$  من  $D_f$ .

**03.** ننشئ في نفس المعلم  $(O, \vec{i}, \vec{j})$  المستقيم  $(\Delta)$  و المنحنى  $(C_f)$  ..... (1.25 ن)





أ- نبين أن :  $\int_1^{\sqrt{e}} \frac{1}{x(1-\ln x)} dx = \ln 2$  ( لاحظ أن :  $\frac{1}{x(1-\ln x)} = \frac{\frac{1}{x}}{1-\ln x}$  لكل  $x$  من  $D_f$  ..... (0.75 ن )

$$\cdot \int_1^{\sqrt{e}} \frac{1}{x(1-\ln x)} dx = \int_1^{\sqrt{e}} \frac{\frac{1}{x}}{(1-\ln x)} dx = [1-\ln x]_1^{\sqrt{e}} = \ln 2$$

$$\int_1^{\sqrt{e}} \frac{1}{x(1-\ln x)} dx = \ln 2 \text{ : خلاصة}$$

ب- نحسب ، ب  $cm^2$  مساحة حيز المستوى المحصور بين المنحنى  $(C_f)$  و المستقيم  $(\Delta)$  و المستقيمين اللذين معادلتهما

$$x = \sqrt{e} \text{ و } x = 1 \text{ ..... (0.75 ن)}$$

$$A = 4 \times \int_1^{\sqrt{e}} (x - f(x)) dx = 4 \times \int_1^{\sqrt{e}} \left( \frac{1}{x(1-\ln x)} - x \right) dx = 4 \left[ \ln(|1-\ln x|) - \frac{1}{2}x^2 \right]_1^{\sqrt{e}}$$

$$= -4 \left( \ln\left(\frac{1}{2}\right) - \frac{1}{2} \times e + \frac{1}{2} \right) = 4 \ln 2 + 2e \text{ cm}^2$$

... III

نعتبر المتتالية العددية  $(u_n)$  المعرفة بما يلي :  $u_0 = 2$  و  $u_{n+1} = f(u_n)$  لكل  $n$  من  $\mathbb{N}$ .

01 نبين بالترجع أن :  $1 \leq u_n \leq \alpha$  لكل  $n$  من  $\mathbb{N}$  ..... (0.5 ن)

• نتحقق أن العلاقة صحيحة ل  $n = 0$

لدينا :  $1 \leq u_0 = 2 \leq \alpha$  ( مع  $2,2 < \alpha < 2,3$  )

• نفترض أن العلاقة صحيحة إلى الرتبة  $n$  : أي  $1 \leq u_n \leq \alpha$ .

• نبين أن العلاقة صحيحة ل  $n+1$  : أي نبين أن :  $1 \leq u_{n+1} \leq \alpha$

حسب معطيات الترجع لدينا : ( لأن  $f$  تزايدية على  $[1; \alpha]$  )  $1 \leq u_n \leq \alpha \Rightarrow f(1) \leq f(u_n) \leq f(\alpha)$

$$\Rightarrow 1 \leq u_{n+1} \leq \alpha ; (f(\alpha) - \alpha = 0)$$

و منه : العلاقة صحيحة ل  $n+1$

• خلاصة :  $1 \leq u_n \leq \alpha$  لكل  $n$  من  $\mathbb{N}$ .

02 بين أن المتتالية  $(u_n)$  تناقصية ( يمكن استعمال نتيجة السؤال II ( 2 ج - ) ..... (0.5 ن)

نبين أن :  $u_{n+1} - u_n \leq 0$  لكل  $n$  من  $\mathbb{N}$ .

نضع  $x = u_n$  ونعلم أن  $1 \leq u_n \leq \alpha$  إذن  $1 \leq x \leq \alpha$  ولدينا :  $f(x) - x \leq 0$  لكل  $x$  من  $[1; \alpha]$  من جهة أخرى :

$$u_{n+1} - u_n = f(u_n) - u_n = f(x) - x \leq 0$$

و منه :  $u_{n+1} - u_n \leq 0$

• خلاصة : المتتالية  $(u_n)$  تناقصية.



**03.** استنتج أن المتتالية  $(u_n)$  متقاربة و حدد نهايتها ..... (0.75 ن)

- لدينا المتتالية  $(u_n)$  تناقصية و مصغرة لأن  $1 \leq u_n \leq \alpha$  و منه : المتتالية  $(u_n)$  متقاربة حسب خاصية .
- المتتالية تكتب على شكل  $u_{n+1} = f(u_n)$  و الدالة  $f$  متصلة على  $I = [1; \alpha]$  و  $f(I) \subset I = [1; \alpha]$  و : المتتالية  $(u_n)$  متقاربة إذن نهايتها  $l$  هي حل للمعادلة  $f(x) = x$  ;  $x \in [1; \alpha]$
- أي  $f(x) - x = 0$  ;  $x \in [1; \alpha]$  و هذه المعادلة لها حلين هما  $1$  و  $\alpha$  و بما أن المتتالية  $(u_n)$  تناقصية إذن  $u_0 \geq u_1 \geq u_2 \dots \geq u_n$  و منه  $u_0 = 2 \geq u_n$  و منه  $u_n \leq 2$  الحل هو  $l = 1$  و ليس  $\alpha$  لأن  $2, 2 < \alpha < 2, 3$
- خلاصة :  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 1$

**02.** باك 2014 الدورة العادية

**I.** نتكن الدالة العددية  $g$  المعرفة على  $D = ]0; +\infty[$  بما يلي :  $g(x) = 1 - \frac{1}{x^2} + \ln(x)$

**01.** نبين أن :  $g'(x) = \frac{2}{x^3} + \frac{1}{x}$  لكل  $x$  من  $]0; +\infty[$  و استنتج أن الدالة  $g$  تزايدية على  $]0; +\infty[$  . (0.5 ن)

- لدينا الدالة  $g$  قابلة للاشتقاق على  $]0; +\infty[$  ( مجموع دوال قابلة للاشتقاق ) :  $g'(x) = \left(1 - \frac{1}{x^2} + \ln(x)\right)' = \frac{2}{x^3} + \frac{1}{x}$
- ومنه :  $g'(x) = \frac{2}{x^3} + \frac{1}{x}$  لكل  $x$  من  $]0; +\infty[$  .

- لدينا :  $g'(x) = \frac{2}{x^3} + \frac{1}{x} > 0$  لأن  $x$  من  $]0; +\infty[$  ومنه الدالة  $g$  تزايدية على  $]0; +\infty[$  .

**02.** تحقق أن  $g(1) = 0$  ثم استنتج أن  $g(x) \leq 0$  لكل  $x$  من  $]0; 1[$  و  $g(x) \geq 0$  لكل  $x$  من  $]1; +\infty[$  . (0.75 ن)

- $g(1) = 0$  :  $g(1) = 1 - \frac{1}{1^2} + \ln 1 = 1 - 1 + 0 = 0$  و منه :  $g(1) = 0$

- لدينا لكل  $x$  من  $]0; 1[$  إذن  $x \leq 1$  بما أن  $g$  تزايدية إذن  $g(x) \leq g(1)$  أي  $g(x) \leq 0$

- لدينا لكل  $x$  من  $]1; +\infty[$  إذن  $x \geq 1$  بما أن  $g$  تزايدية إذن  $g(x) \geq g(1)$  أي  $g(x) \geq 0$

**II.** نعتبر الدالة العددية  $f$  المعرفة بما يلي :  $f(x) = (1 + \ln(x))^2 + \frac{1}{x^2}$  . ليكن  $(C_f)$  المنحنى الممثل للدالة  $f$  في معلم متعامد

ممنظم  $(O, \vec{i}, \vec{j})$  ( الوحدة 1 cm ) .

**01.** نبين أن :  $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = +\infty$  و أول هندسيا النتيجة . (0.5 ن)

- لدينا :  $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x^2} = +\infty$  و  $\lim_{x \rightarrow 0^+} \ln(x) = -\infty$  و منه :  $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = +\infty$

- تأويل الهندسي للنتيجة : المنحنى  $(C_f)$  يقبل مقارب عمودي هو المستقيم الذي معادلته  $x = 0$

**02.** أ- نحسب  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$  . (0.25 ن)



- لدينا :  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln(x) = +\infty$  و  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x^2} = 0$  لأن  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (1 + \ln(x))^2 + \frac{1}{x^2} = +\infty$

خلاصة :  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$

- ب - نبين أن :  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(1 + \ln(x))^2}{x} = 0$  ( يمكنك وضع  $t = \sqrt{x}$  ) ثم بين أن  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = 0$  ( ن 1 )

- نضع  $t = \sqrt{x}$  ومنه  $t^2 = x$  و  $x \rightarrow +\infty$  فإن  $t \rightarrow +\infty$  و بالتالي :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(1 + \ln(x))^2}{x} = \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{(1 + \ln(t^2))^2}{t^2} = \lim_{t \rightarrow +\infty} \left( \frac{1 + 2\ln(t)}{t} \right)^2 = \lim_{t \rightarrow +\infty} \left( \frac{1}{t} + 2 \frac{\ln(t)}{t} \right)^2 = 0$$

- لأن  $\lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{\ln(t)}{t} = 0$  و  $\lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{1}{t} = 0$

خلاصة :  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(1 + \ln(x))^2}{x} = 0$

- نبين أن  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = 0$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(1 + \ln(x))^2 + \frac{1}{x^2}}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(1 + \ln(x))^2}{x} + \frac{1}{x^3} = 0 + 0 = 0$$

- ج - نحدد الفرع اللانهائي للمنحنى  $(C_f)$  بجوار  $+\infty$  . ( 0.25 ن )

- بما أن :  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$  و  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = 0$  إذن المنحنى  $(C_f)$  يقبل فرعاً شلجياً في اتجاه محور الأفاصل بجوار  $+\infty$  .

- 03. أ- نبين أن :  $f'(x) = \frac{2g(x)}{x}$  لكل  $x$  من  $]0; +\infty[$  ثم استنتج أن  $f$  تناقصية على  $]0; 1]$  و تزايدية على  $]1; +\infty[$  . ( 1.5 ن )

- نبين أن :  $f'(x) = \frac{2g(x)}{x}$  لكل  $x$  من  $]0; +\infty[$  .

لدينا :

$$f'(x) = \left( (1 + \ln(x))^2 + \frac{1}{x^2} \right)' = 2(1 + \ln(x)) (1 + \ln(x)) - \frac{2}{x^3} = \frac{2}{x} (1 + \ln(x)) - \frac{2}{x^3} = \frac{2}{x} \left( 1 + \ln(x) - \frac{1}{x^2} \right) = \frac{2g(x)}{x}$$

خلاصة :  $f'(x) = \frac{2g(x)}{x}$  لكل  $x$  من  $]0; +\infty[$  .

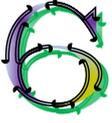
- نستنتج أن  $f$  تناقصية على  $]0; 1]$  و تزايدية على  $]1; +\infty[$  .

إشارة  $f'$  هي إشارة  $g$  حسب ما سبق السؤال 2 لدينا :  $g(x) \leq 0$  لكل  $x$  من  $]0; 1]$  و  $g(x) \geq 0$  لكل  $x$  من  $]1; +\infty[$  و

منه  $f$  تناقصية على  $]0; 1]$  و تزايدية على  $]1; +\infty[$  .

خلاصة :  $f$  تناقصية على  $]0; 1]$  و تزايدية على  $]1; +\infty[$  .

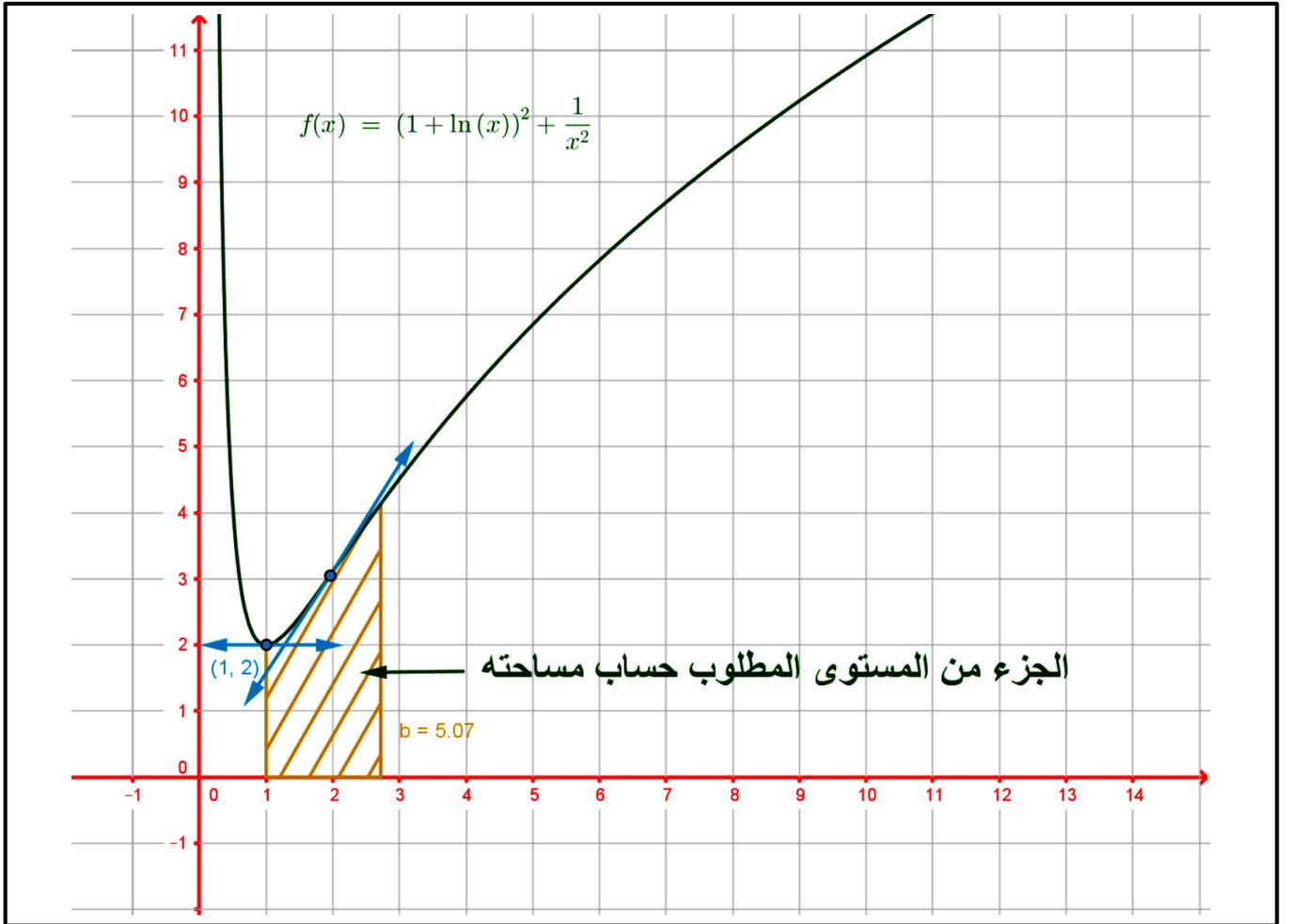
- ب- نضع جدول لتغيرات الدالة  $f$  على  $]0; +\infty[$  ثم استنتج أن  $f(x) \geq 0$  لكل  $x$  من  $]0; +\infty[$  . ( 1 ن )



• جدول تغيرات الدالة f

x	0	1	$+\infty$
f'		- 0 +	
f	$+\infty$	$\searrow$	$\nearrow$ $+\infty$
		0	

**04.** أنشئ المنحنى  $(C_f)$  في المعلم  $(O, \bar{i}, \bar{j})$  (نقبل أن المنحنى  $(C_f)$  يقبل نقطة انعطاف وحيدة تحديدها غير مطلوب) . (0.75 ن)



**05.** نعتبر التكاملين I و J. التاليين  $I = \int_1^e (1 + \ln(x)) dx$  و  $J = \int_1^e (1 + \ln(x))^2 dx$ .

أ - نبين أن :  $H : x \rightarrow x \ln(x)$  دالة أصلية للدالة  $h : x \rightarrow 1 + \ln(x)$  على  $]0; +\infty[$  ثم استنتج أن  $I = e$  . (0.5 ن)

• لدينا :  $H'(x) = (x \ln(x))' = 1 \times \ln(x) + x \times \frac{1}{x} = 1 + \ln(x)$

إذن :  $H : x \rightarrow x \ln(x)$  دالة أصلية للدالة  $h : x \rightarrow 1 + \ln(x)$  على  $]0; +\infty[$

• لدينا :  $I = \int_1^e (1 + \ln(x)) dx = e$  ومنه :  $I = \int_1^e (1 + \ln(x)) dx = [H(x)]_1^e = [x \ln(x)]_1^e = e \ln(e) - 1 \times \ln(1) = e$



ب - باستعمال الكاملة بالأجزاء نبين أن :  $J = 2e - 1$  . ( 0.5 ن )  
نضع :

$$u(x) = (1 + \ln(x))^2 \quad u'(x) = 2 \times \frac{1}{x} \times (1 + \ln(x))$$

$$v'(x) = 1 \quad v(x) = x$$

$$J = \int_1^e (1 + \ln(x))^2 dx$$

$$= \left[ x(1 + \ln(x))^2 \right]_1^e - \int_1^e x \times 2 \times \frac{1}{x} \times (1 + \ln(x)) dx$$

$$= e(1+1)^2 - 1(1+0)^2 - 2I \quad \text{ومنه :}$$

$$= 4e - 1 - 2e$$

$$= 2e - 1$$

**خلاصة :  $J = 2e - 1$**

ج - نحسب ب  $cm^2$  مساحة حيز المستوى المحصور بين المنحنى  $(C_f)$  و محور الأفاصل و المستقيمين اللذين معادلتيهما  $x = 1$  و  $x = e$  ( 0.5 ن )

مساحة حيز المستوى المحصور بين المنحنى  $(C_f)$  و محور الأفاصل و المستقيمين اللذين معادلتيهما  $x = 1$  و  $x = e$  هي :

$$\mathcal{A} = \int_1^e \left( (1 + \ln(x))^2 + \frac{1}{x^2} \right) dx$$

$$= \int_1^e (1 + \ln(x))^2 dx + \int_1^e \frac{1}{x^2} dx$$

$$= 2e - 1 + \left[ -\frac{1}{x} \right]_1^e$$

$$= 2e - 1 - \left( \frac{1}{e} - 1 \right) = 2e - \frac{1}{e}$$

**خلاصة :** مساحة حيز المستوى المحصور بين المنحنى  $(C_f)$  و محور الأفاصل و المستقيمين اللذين معادلتيهما  $x = 1$  و  $x = e$

هي :  $\mathcal{A} = 2e - \frac{1}{e}$  ( u.a ) ( معبر عنها بوحدة المساحة )

**03 .** باك 2013 الدورة الاستدراكية

I . لتكن الدالة العددية  $g$  المعرفة على  $D = ]0; +\infty[$  بما يلي :  $g(x) = x^2 - x - \ln(x)$  .

01 . أ - نتحقق أن :  $2x^2 - x - 1 = (2x+1)(x-1)$  . ( 0.25 ن )

لدينا :  $(2x+1)(x-1) = 2x^2 - 2x + x - 1 = 2x^2 - x - 1$  .

**خلاصة :**  $2x^2 - x - 1 = (2x+1)(x-1)$

ب - نبين أن  $g'(x) = \frac{2x^2 - x - 1}{x}$  لكل  $x$  من  $]0; +\infty[$  و استنتج أن الدالة  $g$  تناقصية على  $]0; 1[$  و تزايدية على  $]1; +\infty[$  . ( 1 ن )



• لدينا :  $g'(x) = (x^2 - x - \ln(x))' = 2x - 1 - \frac{1}{x} = 2x^2 - x - 1$  و منه :  $g'(x) = \frac{2x^2 - x - 1}{x}$

•  $g'(x) = \frac{2x^2 - x - 1}{x} = \frac{(2x+1)(x-1)}{x}$  ومنه إشارة  $g'(x)$  هي إشارة  $x-1$  لأن  $2x+1$  موجبة على  $]0; +\infty[$  ومنه :  $x-1$  سالبة على  $]0; 1[$  إذن الدالة  $g$  تناقصية على  $]0; 1[$  ؛  $x-1$  موجبة على  $]1; +\infty[$  إذن الدالة  $g$  تزايدية على  $]1; +\infty[$ .

• خلاصة :  $g'(x) = \frac{2x^2 - x - 1}{x}$  لكل  $x$  من  $]0; +\infty[$  و الدالة  $g$  تناقصية على  $]0; 1[$  تزايدية على  $]1; +\infty[$ .

**02.** بين أن :  $g(x) \geq 0$  لكل  $x$  من  $]0; +\infty[$  ( لاحظ أن  $g(1) = 0$  ) . ( 0.5 ن )

بما أن : الدالة  $g$  تناقصية على  $]0; 1[$  تزايدية على  $]1; +\infty[$  إذن الدالة  $g$  تقبل قيم دنيا في النقطة التي أفصولها  $x_0 = 1$  ومنه لكل  $x$  من  $]0; +\infty[$  فإن  $g(x) \geq g(0)$  أي  $g(x) \geq 0$  لأن  $g(1) = 0$  ومنه :  $g(x) \geq 0$  لكل  $x$  من  $]0; +\infty[$  ( يمكنك وضع جدول تغيرات الدالة  $g$  )

**II.** نعتبر الدالة العددية  $f$  المعرفة بما يلي :  $f(x) = x^2 - 1 - (\ln(x))^2$  . وليكن  $(\rho_f)$  المنحنى الممثل للدالة  $f$  في معلم متعامد ممنظم  $(O, \vec{i}, \vec{j})$  ( الوحدة 1 cm ) .

**01.** أ - نبين أن :  $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = -\infty$  و أول هندسيا النتيجة . ( 0.5 ن )

• لدينا :  $\lim_{x \rightarrow 0^+} x^2 - 1 = -1$  و  $\lim_{x \rightarrow 0^+} \ln x = -\infty$  و منه :  $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} x^2 - 1 - (\ln(x))^2 = -\infty$

• **نوول هندسيا النتيجة :** المنحنى  $(\rho_f)$  يقبل مقارب عمودي هو المستقيم الذي معادلته  $x = 0$  .

ب - نبين أن :  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$  و  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = +\infty$  . ( لاحظ أن  $f(x) = x^2 \left( 1 - \frac{1}{x^2} - \left( \frac{\ln(x)}{x} \right)^2 \right)$  ) . ( 0.5 ن )

• لدينا :  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 - 1 - (\ln(x))^2 = \lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 \left( 1 - \left( \frac{\ln x}{x} \right)^2 \right) - 1 = +\infty$  و  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$  لأن  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = 0$  .  $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 = +\infty$

• لدينا :  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 \left( 1 - \frac{1}{x^2} - \left( \frac{\ln(x)}{x} \right)^2 \right)}{x} = +\infty$  لأن  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$  و  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x^2} = 0$

ج - استنتج أن المنحنى  $(\rho_f)$  يقبل فرعا شلجيا بجوار  $+\infty$  يتم تحديد اتجاهه . ( 0.25 ن )

• بما أن :  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$  و  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = +\infty$  فإن  $(\rho_f)$  يقبل فرعا شلجيا في اتجاه محور الأفاصيل بجوار  $+\infty$  .

**02.** أ - نبين أن :  $f'(x) = 2 \left( \frac{x^2 - \ln(x)}{x} \right)$  لكل  $x$  من  $]0; +\infty[$  . ( 1 ن )



$$f'(x) = \left( x^2 - 1 - (\ln(x))^2 \right)' = 2x - 2(\ln x)' \ln x = 2x - 2 \times \frac{1}{x} \times \ln x = 2 \left( \frac{x^2 - \ln(x)}{x} \right) \text{ لدينا :}$$

$$\text{خلاصة : } f'(x) = 2 \left( \frac{x^2 - \ln(x)}{x} \right) \text{ لكل } x \text{ من } ]0; +\infty[ .$$

ب- نتحقق أن :  $\frac{g(x)}{x} + 1 = \frac{x^2 - \ln(x)}{x}$  لكل  $x$  من  $]0; +\infty[$  و استنتج أن  $f$  تزايدية على  $]0; +\infty[$  . (0.75 ن)

$$\text{لدينا : } \frac{g(x)}{x} + 1 = \frac{x^2 - \ln(x)}{x} \text{ ومنه : } \frac{g(x)}{x} + 1 = \frac{x^2 - x - \ln(x)}{x} + 1 = \frac{x^2 - \cancel{x} - \ln(x) + \cancel{x}}{x} = \frac{x^2 - \ln(x)}{x}$$

ومنه نستنتج أن :  $f'(x) = 2 \left( \frac{x^2 - \ln(x)}{x} \right) = 2 \left( \frac{g(x)}{x} + 1 \right) \geq 0$  لأن  $g(x) \geq 0$  لكل  $x$  من  $]0; +\infty[$  و بالتالي  $f$  تزايدية على  $]0; +\infty[$  .

$$\text{خلاصة : } \frac{g(x)}{x} + 1 = \frac{x^2 - \ln(x)}{x} \text{ لكل } x \text{ من } ]0; +\infty[ \text{ و } f \text{ تزايدية على } ]0; +\infty[ .$$

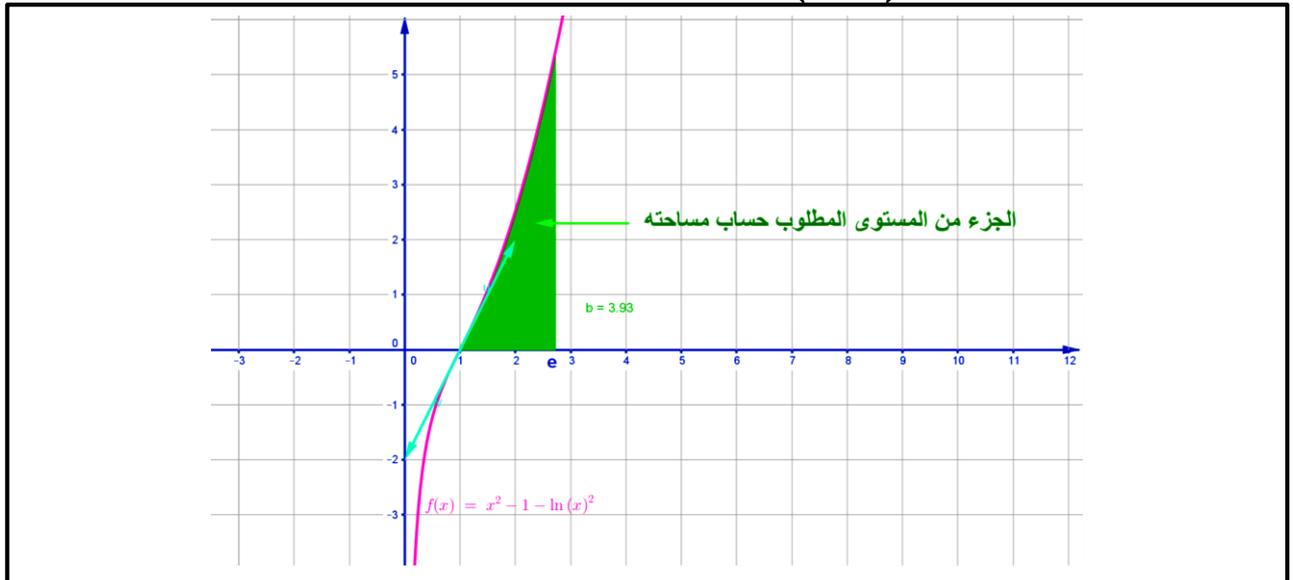
03. أ- نبين أن :  $y = 2x - 2$  هي معادلة ديكارتية للمستقيم (T) المماس للمنحنى  $(C_f)$  في النقطة  $A(1;0)$  . (0.5 ن)

• معادلة المماس في النقطة  $A(1;0)$  هي :

$$y = (x-1)f'(1) + f(1) = (x-1) \times 2 + 0 = 2x - 2$$

خلاصة :  $y = 2x - 2$  هي معادلة ديكارتية للمستقيم (T) المماس للمنحنى  $(C_f)$  في النقطة  $A(1;0)$  .

ب- ننشئ المنحنى  $(C_f)$  في المعلم  $(O, \vec{i}, \vec{j})$  (نقبل أن المنحنى  $(C_f)$  يقبل نقطة انعطاف وحيدة هي  $A(1;0)$  .) (1 ن)



04. أ - لتتحقق أن الدالة  $x \rightarrow x(\ln(x) - 1)$  دالة أصلية للدالة  $x \rightarrow \ln(x)$  على المجال  $]0; +\infty[$  ثم بين أن :

$$I = \int_1^e \ln(x) dx = 1 \text{ . (0.75 ن)}$$

• لدينا : الدالة  $x \rightarrow x(\ln(x) - 1)$  قابلة الاشتقاق على  $]0; +\infty[$  مع دالتها المشتقة هي :



$$(x(\ln(x)-1))' = 1 \times (\ln(x)-1) + x(\ln(x)-1)' = \ln x - 1 + x \times \frac{1}{x} = \ln x$$

• خلاصة: الدالة  $x \rightarrow x(\ln(x)-1)$  دالة أصلية للدالة  $x \rightarrow \ln(x)$  على المجال  $]0; +\infty[$ .

• لدينا:  $I = \int_1^e \ln(x) dx = [x(\ln(x)-1)]_1^e = e(1-1) - 1 - 1 \times (0-1) + 1 = 1$

خلاصة:  $I = \int_1^e \ln(x) dx = 1$

ب - باستعمال المكاملة بالأجزاء بين أن:  $J = \int_1^e (\ln(x))^2 dx = e - 2$  (0.5 ن)

نضع:

$$\begin{aligned} u(x) &= (\ln(x))^2 & u'(x) &= 2 \times \frac{1}{x} \times \ln x \\ v'(x) &= 1 & v(x) &= x \end{aligned}$$

ومنه:

$$\begin{aligned} J &= \int_1^e (\ln(x))^2 dx \\ &= [x(\ln(x))^2]_1^e - \int_1^e x \times 2 \times \frac{1}{x} \times \ln x dx \\ &= e(1)^2 - 1(0)^2 - 2I \\ &= e - 2 \\ &= e - 2 \end{aligned}$$

خلاصة:  $J = \int_1^e (\ln(x))^2 dx = e - 2$

ج - نبين أن مساحة حيز المستوى المحصور بين المنحنى  $(C_f)$  و محور الأفاصل والمستقيمين اللذين معادلتهم  $x=1$  و  $x=e$

هي  $\frac{1}{3}(e^3 - 6e + 8) \text{ cm}^2$  (0.5 ن)

مساحة حيز المستوى المحصور بين المنحنى  $(C_f)$  و محور الأفاصل والمستقيمين اللذين معادلتهم  $x=1$  و  $x=e$  هي:

$$\begin{aligned} \mathcal{A} &= \int_1^e (x^2 - 1 - (\ln(x))^2) dx = \int_1^e (x^2 - 1) dx - \int_1^e (\ln(x))^2 dx \\ &= \left[ \frac{1}{3}x^3 - x \right]_1^e - e + 2 & ; & \left( \int_1^e (\ln(x))^2 dx = J = e - 2 \right) \\ &= \left( \frac{e^3}{3} - e - \frac{1}{3} + 1 \right) - e + 2 \\ &= \frac{e^3}{3} - 2e + \frac{8}{3} = \frac{1}{3}(e^3 - 6e + 8) \end{aligned}$$

خلاصة: مساحة حيز المستوى المحصور بين المنحنى  $(C_f)$  و محور الأفاصل والمستقيمين اللذين معادلتهم  $x=1$  و  $x=e$

هي:  $\mathcal{A} = \frac{1}{3}(e^3 - 6e + 8) \text{ cm}^2$  (معبر عنها بوحدة المساحة هي  $\text{cm}^2$ )