I. الاشتقاق في نقطة الاشتقاق على اليمين و اليسار:

01. تعريف (تذكير) :

لتكن f دالة عددية معرفة على مجال مفتوح مركزه x_0 و $\ell \in \mathbb{R}$ نقول أن : الدالة f قابلة للاشتقاق في x0 إذا كان:

$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=\ell$ أو أيضا: $\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}=\ell$ العدد ℓ يسمى العدد المشتق ل f في x0 و يرمز له ب : $f'(x_0)$

$$f'(x_0)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}=\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}.$$

02. خاصية:

لتكن f دالة قابلة للاشتقاق في x_0.

- معادلة المماس (T) لمنحنى الدالة f في النقطة التي أفصولها x_0 هي : $(T):y=(x-x_0)f'(x_0)+f(x_0)$
- كل دالة قابلة للاشتقاق في x_0 تكون متصلة في x_0. (العكس ليس دائما صحيح) .
- تكون f قابلة للاشتقاق في x_0 إذا وفقط إذا كان يوجد عدد حقيقي a و توجد دالة ε حيث :

$f(x)=f(x_0)+a(x-x_0)+(x-x_0)\varepsilon(x)$ $\forall x\in D_f\setminus\{x_0\}$ مع $\lim_{x\to x_0}\varepsilon(x)=0$. (و في هذه الحالة $f'(x_0)=a$).

03. الدالة التآلفية h ل f بجوار x_0:

- تعريف :

لتكن f دالة قابلة للاشتقاق في x_0.

الدالة h المعرفة ب: $h(x)=(x-x_0)f'(x_0)+f(x_0)$ تسمى الدالة التآلفية المماسة ل f بجوار x_0 .

نكتب $f(x)\approx h(x)$ بجوار x_0 (أي h تقريب ل f بجوار x_0)

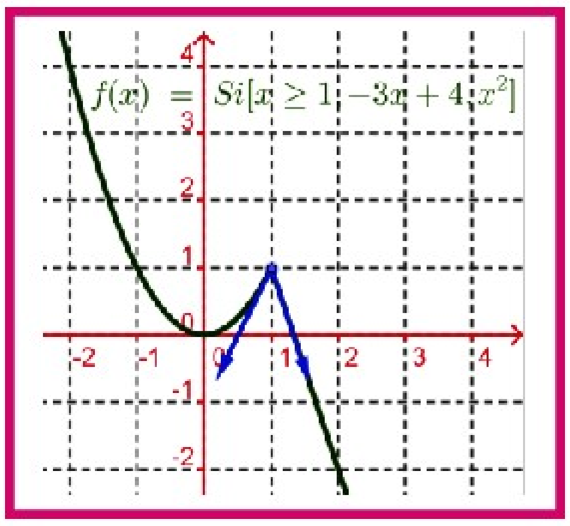
04. ملحوظة :

منحنى الدالة h هو المستقيم (T) المماس لمنحنى f في النقطة التي أفصولها x_0

05. نشاط 2 :

لنعتبر الدالة العددية f للمتغير الحقيقي x المعرفة بما يلي: $\begin{cases} f(x)=-3x+4 & ;x\geq 1\\ f(x)=x^2 & ;x<1\end{cases}$

1. أدرس اشتقاق f على يمين $x_0=1$. ثم أنشئ نصف المماس.
2. أدرس اشتقاق f على يسار $x_0=1$. ثم أنشئ نصف المماس.
3. هل f قابلة للاشتقاق في $x_0=1$ ؟
4. حدد معادلتي نصفي المماس لمنحنى الدالة f على يمين و يسار النقطة ذات الأفصول $x_0=1$.



الجواب

بطريقة مبيانيا

ملاحظة: النقطة ذات الأفصول $x_0=1$ تسمى نقطة مزواة .

.06 تعريف: (الاشتقاق على يمين x_0)

لتكن f دالة معرفة على مجال من شكل $[x_0, x_0+\alpha[$ ، $(\alpha>0)$

f قابلة للاشتقاق على اليمين في x_0 إذا كان $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ x>x_0}} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = \ell_d = f_d'(x_0) \in \mathbb{R}$

العدد $f_d'(x_0)$ يسمى العدد المشتق على اليمين x_0 ل f.

.07 تعريف: (الاشتقاق على يسار x_0)

لتكن f دالة معرفة على مجال من شكل $]x_0-\alpha, x_0]$ ، $(\alpha>0)$

f قابلة للاشتقاق على اليسار في x_0 إذا كان $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ x<x_0}} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = \ell_g = f_g'(x_0) \in \mathbb{R}$. العدد $f_g'(x_0)$ يسمى العدد المشتق على اليسا x_0

.08 خاصية:

تكون f قابلة للاشتقاق في x_0 إذا وفقط إذا كانت ما يلي:

- f قابلة للاشتقاق على اليمين في x_0.
- f قابلة للاشتقاق على اليسار في x_0.
- العدد المشتق على اليمين يساوي العدد المشتق على اليسار في x_0. أي $\left(f_d'(x_0) = f_g'(x_0)\right)$.

.09 تمرين تطبيقي :

أدرس اشتقاق f في x_0 : 1) $f(x)=\sqrt{x}$ ؛ $x_0=0$ على اليمين . 2) $f(x)=\sqrt[4]{x}$ ؛ $x_0=0$ على اليمين .

3) $f(x)=[x]$ ؛ $x_0=0$ على اليمين و على اليسار. 4) $f(x)=\arctan x$ ؛ $x_0=0$

II. اشتقاق دالة على مجال – الدالة المشتقة الأولى لدالة:

.01 تعريف:

- إذا كانت الدالة f قابلة للاشتقاق في كل نقطة x_0 من $]a,b[$ نقول أن الدالة f قابلة للاشتقاق على المجال $]a,b[$.
- f دالة عددية قابلة للاشتقاق على المجال $[a,b[$ إذا كانت
  - الدالة f قابلة للاشتقاق على المجال $]a,b[$
  - f قابلة للاشتقاق على اليمين في a .

.02 الدالة المشتقة للدالة:

- تعريف:

الدالة التي تربط كل عنصر x_0 من المجال I بالعدد $f'(x_0)$ تسمى الدالة المشتقة ل f و نرمز لها ب f'

- ملحوظة :

إذا كان : $I=[a,b]$ و $I=[a,b[$ و $I=]a,b[$ نصطلح ان : $f'(a)=f_d'(a)$ و $f'(b)=f_g'(b)$

▪ مثال : الدالة المشتقة ل $f(x)=x^3$ على $\mathbb{R}$ هي $f'(x)=3x^2$.

III. جدول الدوال المشتقة لبعض الدوال الاعتيادية: (الجدول1)

الدالة $f(x)=$	مجموعة تعريف f	الدالة المشتقة $f'(x)=$	مجموعة تعريف f'	الدالة $f(x)=$	مجموعة تعريف f	الدالة المشتقة $f'(x)=$	مجموعة تعريف f'
a	$D_f=\mathbb{R}$	$f'(x)=0$	$D_{f'}=\mathbb{R}$	$\sqrt{x}$	$D_f=\mathbb{R}^{+*}$	$\dfrac{1}{2\times\sqrt{x}}$	$D_{f'}=]0,+\infty[$
x	$D_f=\mathbb{R}$	$f'(x)=1$	$D_{f'}=\mathbb{R}$	$\cos x$	$D_f=\mathbb{R}$	$\cos x$	$D_{f'}=\mathbb{R}$
x^n $n\in\mathbb{N}^*\setminus\{1\}$	$D_f=\mathbb{R}$	$f'(x)=nx^{n-1}$	$D_{f'}=\mathbb{R}$	$\sin x$	$D_f=\mathbb{R}$	$\cos x$	$D_{f'}=\mathbb{R}$
$f(x)=x^n$ $n\in\mathbb{Z}^*\setminus\{1\}$	$D_f=\mathbb{R}^*$	$f'(x)=nx^{n-1}$	$D_{f'}=\mathbb{R}^*$	$\dfrac{ax+b}{cx+d}$	$\mathbb{R}\setminus\left\{-\dfrac{d}{c}\right\}$ و $c\neq0$	$\dfrac{\begin{vmatrix}a & b\\ c & d\end{vmatrix}}{(cx+d)^2}$	$\mathbb{R}\setminus\left\{-\dfrac{d}{c}\right\}$ و $c\neq0$
$f(x)=\dfrac{1}{x}$	$D_f=\mathbb{R}^*$	$f'(x)=\dfrac{-1}{x^2}$	$D_{f'}=\mathbb{R}^*$	$\tan x$	$x\neq\dfrac{\pi}{2}+k\pi$	$1+\tan^2x$	$x\neq\dfrac{\pi}{2}+k\pi$

IV. العمليات على الدوال المشتقة:

01. خاصيات: (أنظر الجدول 2)

لتكن f و g دالتين قابلتين للاشتقاق على مجال I.

الدالة	مشتقتها	شرط	الدالة	مشتقتها	شرط
$f+g$	$(f+g)'=f'+g'$		$\dfrac{f}{g}$	$\left(\dfrac{f}{g}\right)'=\dfrac{f'\times g-f\times g'}{g^2}$	g لا تنعدم على I
$\alpha\times f$	$(\alpha\times f)'=\alpha\times f'$	$\alpha\in\mathbb{R}$	f^n	$\left(f^n\right)'(x)=n\times\left(f(x)\right)^{n-1}\times f'(x)$	$n\in\mathbb{N}^*$
$f\times g$	$(f\times g)'=f'\times g+f\times g'$		f^n	$\left(f^n\right)'(x)=n\times\left(f(x)\right)^{n-1}\times f'(x)$	$n\in\mathbb{Z}^{-*}$ و f لا تنعدم على I
$\dfrac{1}{g}$	$\left(\dfrac{1}{g}\right)'=\dfrac{-g'}{g^2}$	g لا تنعدم على I			

02. أمثلة: أحسب الدالة المشتقة f' للدالة f في الحالات التالية

أ- $f(x)=-2x^4+3x^2-1$. ب- $f(x)=\dfrac{3x-1}{x^2-1}$. ج- $f(x)=2x\cos x$. د- $f(x)=1+(3x+2)^4$.

V. الدالة المشتقة الثانية – المشتقات المتتالية (أو المتتابعة) لدالة f .

1. مفردات :

▪ المشتقة ل f' تسمى المشتقة الثانية ل f . نرمز لها ب : $(f'(x))'=f''(x)=f^{(2)}(x)$.

▪ إذا كانت $f^{(2)}$ بدورها قابلة للاشتقاق على I فدالتها المشتقة $\left(f^{(2)}\right)'(x)$ تسمى المشتقة الثالثة ل f ونرمز لها ب $\left(f^{(2)}\right)'=f^{(3)}$

2. بصفة عامة :

المشتقة من الرتبة n للدالة f (أي $f^{(n)}(x)$)هي المشتقة ل $f^{(n-1)}(x)$ (أي المشتقة من الرتبة n-1) $(f^{(n-1)}(x))$ونرمز لها ب:

$$f^{(n)}(x)=\left(f^{(n-1)}\right)'(x)$$

مثال:

أحسب $f^{(3)}(x)$ حيث : أ - $f(x)=x^5$ ب - $f(x)=\frac{1}{x^2}$. ج – بين أن : $(\sin x)^{(n)}=\sin\left(x+n\frac{\pi}{2}\right)$.

VI. مشتقة مركب دالتين - مشتقة الدالة العكسية

01.مشتقة مركب دالتين :

1) مبرهنة 1 :

إذا كانت f قابلة للاشتقاق في x_0 و g قابلة للاشتقاق في $f(x_0)$ فإن $g\circ f$ قابلة للاشتقاق في x_0.

و لدينا: $(g\circ f)'(x_0)=g'(f(x_0))\times f'(x_0)$.

2) مبرهنة 2 :

لتكن f و g دالتين قابلتين للاشتقاق على I و $f(I)$ على التوالي

إذا كان x_0 عنصرا من I و كانت f قابلة للاشتقاق على I و g قابلة للاشتقاق في $f(I)$ فإن $g\circ f$ قابلة للاشتقاق على I .

و لدينا: $\forall x\in I:(g\circ f)'(x)=g'(f(x))\times f'(x)$.

3) نتائج :

الدالة $f(x)=$	مجموعة تعريف f	الدالة المشتقة $f'(x)=$	مجموعة تعريف f'	الدالة $f(x)=$	مجموعة تعريف f	الدالة المشتقة $f'(x)=$	مجموعة تعريف f'
$f(x)=\sqrt{g(x)}$	$x\in D_g$ و $g(x)\geq 0$	$f'(x)=\frac{g'(x)}{2\times\sqrt{g(x)}}$	$x\in D_{g'}$ و $g(x)>0$	$f(x)=\cos(ax+b)$	$D_f=\mathbb{R}$	$f'(x)=-a\times\sin(ax+b)$	$D_{f'}=\mathbb{R}$
$f(x)=\sin(ax+b)$	$D_f=\mathbb{R}$	$f'(x)=a\times\cos(ax+b)$	$D_{f'}=\mathbb{R}$	$f(x)=\tan(ax+b)$	$ax+b\neq\frac{\pi}{2}+k\pi$	$f'(x)=a\left[1+\tan^2(ax+b)\right]$	$ax+b\neq\frac{\pi}{2}+k\pi$

4) مثال:

أحسب $f'(x)$ مع أ - $f(x)=\sqrt{x^2-x}$ ب - $f(x)=\cos(2x-4)$.

جواب :

- $f'(x)=\left(\sqrt{x^2-x}\right)'=\frac{(x^2-x)'}{2\sqrt{x^2-x}}=\frac{2x-1}{2\sqrt{x^2-x}}$
- $f'(x)=(\cos(2x-4))'=(2x-4)'\cos'(2x-4)=-2x\sin(2x-4)$

02.مشتقة الدالة العكسية

1) مبرهنة 1 :

لتكن f متصلة و رتيبة قطعا على I (لإذن الدالة f تقابل من المجال I إلى المجال $J=f(I)$).
إذا كانت f قابلة للاشتقاق في x_0 و $f'(x_0)\neq 0$ فإن الدالة العكسية f^{-1} قابلة للاشتقاق في y_0 $f(x_0)=y_0$
لدينا: $\left(f^{-1}\right)'(y_0)=\left(f^{-1}\right)'(f(x_0))=\dfrac{1}{f'(f^{-1}(y))}=\dfrac{1}{f'(x_0)}$.

2) برهان :

بمأن f متصلة على I إذن دالتها العكسية f^{-1} متصلة على $J=f(I)$ و منه لكل y_0 من J لدينا $\lim\limits_{y\to y_0} f^{-1}(y)=f^{-1}(y_0)$.

ندرس اشتقاق f^{-1} في y_0 من J . نضع $f^{-1}(y)=x$ و $f^{-1}(y_0)=x_0$ مع x و x_0 من I .

لدينا :

$$\lim_{y\to y_0}\frac{f^{-1}(y)-f^{-1}(y_0)}{y-y_0}=\lim_{y\to y_0}\frac{x-x_0}{f(x)-f(x_0)}=\lim_{y\to y_0}\frac{1}{\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}}=\frac{1}{f'(x_0)}\in\mathbb{R}\ ;\ (f'(x_0)\neq 0)$$

$$=\frac{1}{f'(f^{-1}(y_0))}\ ;\ (f^{-1}(y_0)=x_0)$$

$$=\frac{1}{f'\circ f^{-1}(y_0)}$$

خلاصة : f^{-1} قابلة للاشتقاق في $y_0=f(x_0)$ من $J=f(I)$ حيث : $\left(f^{-1}\right)'(y_0)=\left(f^{-1}\right)'(f(x_0))=\dfrac{1}{f'(f^{-1}(y))}=\dfrac{1}{f'(x_0)}$

3) مبرهنة 2 :

لتكن f دالة تقابل من المجال I إلى المجال $J=f(I)$.

إذا كانت f قابلة للاشتقاق على I و دالتها المشتقة f' لا تنعدم على I (أي $\forall x\in I\ ;\ f'(x)\neq 0$) فإن الدالة f^{-1} قابلة للاشتقاق المجال $J=f(I)$. لدينا: $\left(f^{-1}\right)'(f(x_0))=\dfrac{1}{f'(f^{-1}(y))}=\dfrac{1}{f'(x_0)}$

4) تطبيق 1 : مشتقة: $\sqrt[n]{x}$ و x^r و $g(x)=[f(x)]^r$. (جدول 4)

$n\in\mathbb{N}^*$ و $r\in\mathbb{Q}^*$ و f موجبة قطعا و قابلة للاشتقاق على I		
$f(x)=\sqrt[n]{x}$	$f'(x)=\left((x)^{\frac{1}{n}}\right)'=\dfrac{1}{n}x^{\frac{1}{n}-1}$	f قابلة للاشتقاق على $]0,+\infty[$.
$f(x)=x^r$	$f(x)=(x^r)'=rx^{r-1}$	
$g(x)=\sqrt[n]{f(x)}$	$g'(x)=\dfrac{1}{n}\times f'(x)\times(f(x))^{\frac{1}{n}-1}$	g قابلة للاشتقاق على I
$g(x)=[f(x)]^r$	$g'(x)=\left([f(x)]^r\right)'=r\times f'(x)\times[f(x)]^{r-1}$	

▪ أمثلة: أحسب f' مع:

$f(x)=\sqrt[5]{x}$. $f(x)=\sqrt[5]{x^2+1}$. $f(x)=\sqrt[5]{\left(x^2+1\right)^7}$

جواب :

- $\left[f(x)=\sqrt[5]{x}\right]'=\left[x^{\frac{1}{5}}\right]'=\frac{1}{5}x^{\frac{1}{5}-1}=\frac{1}{5}x^{\frac{-4}{5}}=\frac{1}{5}\times\frac{1}{\sqrt[5]{x^4}}$
- $\left[f(x)=\sqrt[5]{\left(x^2+1\right)}\right]'=\left[\left(x^2+1\right)^{\frac{1}{5}}\right]'=\frac{1}{5}\left(x^2+1\right)'\left(x^2+1\right)^{\frac{1}{5}-1}=\frac{14}{7}x\left(x^2+1\right)^{\frac{4}{5}}=\frac{14}{7}x\sqrt[5]{\left(x^2+1\right)^4}$
- $\left[f(x)=\sqrt[5]{\left(x^2+1\right)^7}\right]'=\left[\left(x^2+1\right)^{\frac{7}{5}}\right]'=\frac{7}{5}\left(x^2+1\right)'\left(x^2+1\right)^{\frac{7}{5}-1}=\frac{14}{7}x\left(x^2+1\right)^{\frac{2}{5}}=\frac{14}{7}x\sqrt[5]{\left(x^2+1\right)^2}$.

5) تطبيق 2 : مشتقة الدالة $f(x)=\arctan x$ ثم $f(x)=\arctan(u(x))$.

▪ خاصية 1 :

أ- الدالة $f(x)=\arctan x$ قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ و دالتها المشتقة هي $f'(x)=(\arctan x)'=\frac{1}{1+x^2}$.

ب- إذا كانت الدالة $u(x)$ قابلة للاشتقاق على I فإن الدالة $f(x)=\arctan(u(x))$ قابلة للاشتقاق على I و لدينا :

$\forall x\in I : f'(x)=\left(\arctan(u(x))\right)'=\frac{u'(x)}{1+\left(u(x)\right)^2}$.

▪ مثال :

- $\left(\arctan\left(x^3-5x\right)\right)'=\frac{\left(x^3-5x\right)'}{1+\left(x^3-5x\right)^2}=\frac{3x^2-5}{1+\left(x^3-5x\right)^2}$.
- $\left(\arctan(\sin x)\right)'=\frac{(\sin x)'}{1+(\sin x)^2}=\frac{\cos x}{1+(\sin x)^2}$.
- $\left(\arctan^7\left(x^3-5x\right)\right)'=7\left(\arctan\left(x^3-5x\right)\right)'\arctan^6\left(x^3-5x\right)=7\frac{\left(x^3-5x\right)'}{1+\left(x^3-5x\right)^2}\arctan^6\left(x^3-5x\right)$

$$=\frac{3x^2-5}{1+\left(x^3-5x\right)^2}\arctan^6\left(x^3-5x\right)$$

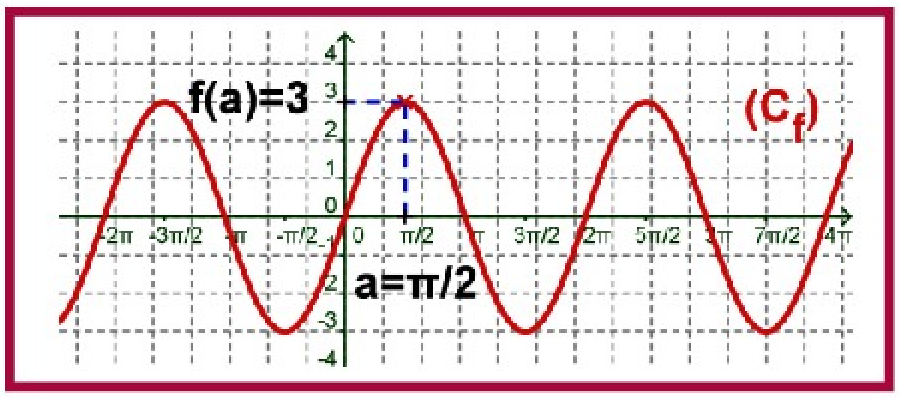
VII. مبرهنة رول - مبرهنة التزايدات المنتهية :

A. مطارف دالة عددية قابلة للاشتقاق.

1. نشاط:

المنحنى الآتي يمثل دالة قابلة للاشتقاق على مجال مفتوح I. a عنصر من I.

1) هل f تقبل مطراف في a ؟
2) أعط قيمة ل $f'(a)$.
3) أعط الخاصية.



2. خاصية :

f دالة قابلة للاشتقاق على مجال مفتوح I. a عنصر من I.
إذا كانت f قابلة للاشتقاق في النقطة a و تقبل مطراف في النقطة a فإن $f'(a)=0$.

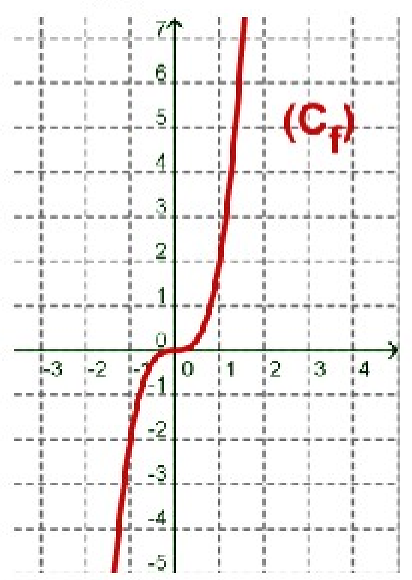
3. ملحوظة :

إذا كان $f'(a)=0$ فهذا لا يعني بالضرورة أن $f(a)$ مطراف للدالة f.

4. مثال :

لدينا : $f(x)=2x^3$ ومنه $f'(x)=6x^2$: $f'(0)=0$
ولكن $f(0)$ ليس مطراف ل f.

الدالة $f(x)=2x^3$



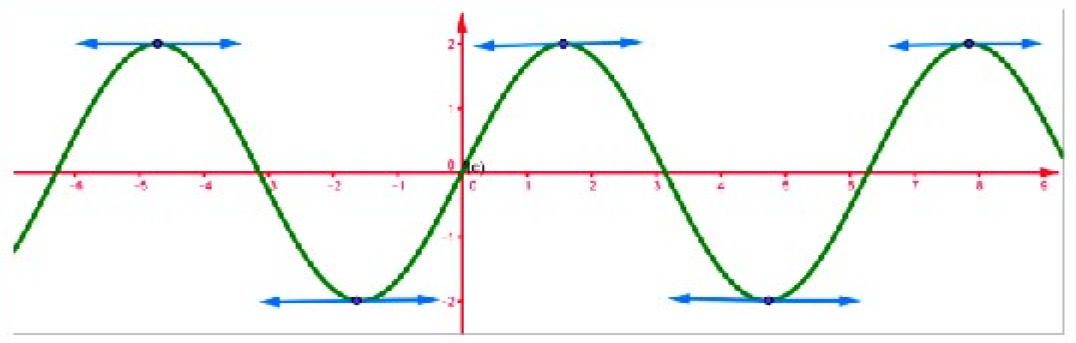
5. خاصية :

f دالة قابلة للاشتقاق على مجال مفتوح I. a عنصر من I
إذا كانت f' تنعدم في النقطة a و تتغير إشارتها بجوار a فإن $f(a)$ مطراف ل f.

B. مبرهنة رول : théorème de Rolle

1. مبرهنة :

ليكن a و b من $\mathbb{R}$ حيث $a<b$. f دالة عددية تحقق ما يلي :
أ- f متصلة على القطعة $[a,b]$.
ب- f قابلة للاشتقاق على $]a,b[$.
ج- $f(a)=f(b)$.
إذن يوجد عنصر c من $]a,b[$ حيث $f'(c)=0$



2. برهان :

حالة 1 : f دالة ثابتة على $[a,b]$:
بمأن f دالة ثابتة على $[a,b]$ إذن : $f'(x)=0$: $\forall x\in]a,b[$.
و بالتالي المبرهنة صحيحة.

حالة 2 : f ليست بدالة ثابتة على $[a,b]$:
بمأن f متصلة على القطعة $[a,b]$ إذن $f([a,b])=[m,M]$ مع $m<M$ لأن f ليست بدالة ثابتة.
نضع : $m=f(\alpha)$ و $M=f(\beta)$ مع α و β من $[a,b]$..
إذن : $\forall x\in[a,b]\ m=f(\alpha)\le f(x)\le f(\beta)=M$. (1)

- حالة : $\alpha=a$ أو $\alpha=b$ نبين أن : $\beta\in]a,b[$.

بالنسبة ل : $\alpha=a$ لدينا $\beta\neq\alpha$ إذن $\beta\neq a$
نفترض أن : $\beta=b$ إذن $M=f(\beta)=f(b)=f(a)=f(\alpha)=m$ و هذا غير ممكن إذن $\beta\neq b$.
و منه : $\beta\in]a,b[$.
بنفس الطريقة ل $\alpha=b$. نحصل على $\beta\in]a,b[$.
و بالتالي f تقبل مطراف في β (قيمة قصوى حسب (1)).

إذن : $f'(\beta)=0$ يكفي أن نأخذ $c=\beta$.

3. ملحوظة :

يمكن تطبيق مبرهنة رول حيث f قابلة للاشتقاق على $[a,b]$ و $f(a)=f(b)$

C. مبرهنة التزايدات المنتهية T.A.F

1. مبرهنة :

ليكن a و b من $\mathbb{R}$ حيث $a<b$. f دالة عددية تحقق ما يلي :

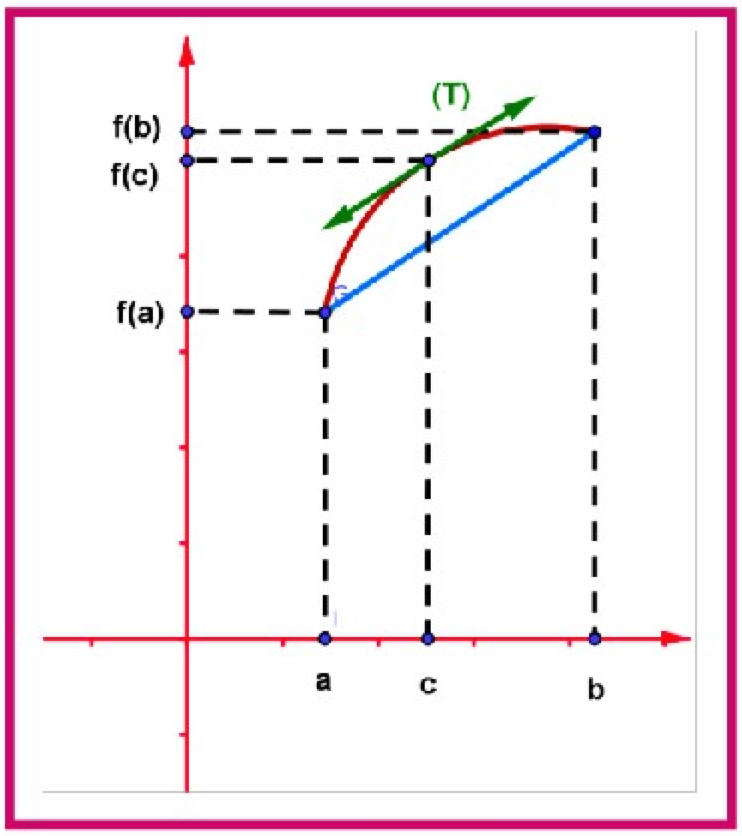
أ- f متصلة على القطعة $[a,b]$.

ب- f قابلة للاشتقاق على $]a,b[$.

إذن يوجد عنصر c من $]a,b[$ حيث $f'(c)=\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$

أو أيضا يوجد عنصر c من $]a,b[$ حيث $f(b)-f(a)=(b-a)f'(c)$

2. برهان :



نعتبر الدالة : g المعرفة على $[a,b]$ بما يلي : $g(x)=f(x)-\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}x-f(a)$

الدالة g تحقق ما يلي :

- g متصلة على القطعة $[a,b]$.
- g قابلة للاشتقاق على $]a,b[$.
- $g(a)=g(b)$.

حسب مبرهنة رول $\exists c\in\,]a,b[\ :\ g'(c)=0\quad(2)$

أي :

$$(2)\Leftrightarrow \exists c\in\,]a,b[\ :\ \left(f(x)-\frac{f(b)-f(a)}{b-a}x-f(a)\right)'_{x=c}=0$$

$$\Leftrightarrow \exists c\in\,]a,b[\ :\ \left(f'(x)-\frac{f(b)-f(a)}{b-a}\right)_{x=c}=0$$

$$\Leftrightarrow \exists c\in\,]a,b[\ :\ f'(c)-\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=0$$

$$\Leftrightarrow \exists c\in\,]a,b[\ :\ f'(c)=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$

3. ملحوظة :

يمكن تطبيق مبرهنة التزايدات المنتهية حيث f قابلة للاشتقاق على $[a,b]$

D. تطبيقات مبرهنة التزايدات المنتهية :

1. متفاوتة التزايدات المنتهية :

❖ خاصية :

f دالة قابلة للاشتقاق على مجال I . k عنصر من $\mathbb{R}^+$.
إذا كان : $\forall x\in I \quad |f'(x)|\le k$ فإن $\forall x,y\in I \quad |f(x)-f(y)|\le k|x-y|$.
أي : $\left(\forall x\in I \quad |f'(x)|\le k\right)\Rightarrow\left(\forall x,y\in I \quad |f(x)-f(y)|\le k|x-y|\right)$.

❖ برهان :

حالة 1 : $x=y$. لدينا : $|f(x)-f(y)|=0\le k|x-y|=0$ الاستلزام صحيح .
حالة 2 : $x\neq y$. نأخذ : $x<y$ (نفس الشيء ل $y<x$) .
لدينا : $[x,y]\subset I$ (لأن I مجال)
بمأن : f دالة قابلة للاشتقاق على مجال I إذن f قابلة للاشتقاق على $[x,y]$.
إذن : $\exists c\in]x,y[\ : f(x)-f(y)=(x-y)f'(c)$ (حسب مبرهنة T.A.F)
ومنه : $|f(x)-f(y)|=|(x-y)f'(c)|=|x-y||f'(c)|\le k|x-y|$. مع $k\ge 0$ و $|f'(c)|\le k$.
خلاصة : $\left(\forall x\in I \quad |f'(x)|\le k\right)\Rightarrow\left(\forall x,y\in I \quad |f(x)-f(y)|\le k|x-y|\right)$

❖ مثال :

نبين : $\forall x,y\in\mathbb{R} : |\cos x-\cos y|\le|x-y|$.
نضع : $f(x)=\cos x$ لدينا : الدالة f قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ و $\forall x\in\mathbb{R} : |\cos x|\le 1$
ومنه حسب متفاوتة التزايدات المنتهية : $\forall x,y\in\mathbb{R} : |\cos x-\cos y|\le|x-y|$.

2. إشارة المشتقة الأولى و رتابة دالة :

❖ خاصية :

f دالة قابلة للاشتقاق على مجال I . k

- إذا كان $\forall x\in I : f'(x)\ge 0$ فإن f تزايدية على I.
- إذا كانت $\forall x\in I : f'(x)>0$ فإن f تزايدية قطعا على I
- إذا كان $\forall x\in I : f'(x)\le 0$ فإن f تناقصية على I.
- إذا كان $\forall x\in I : f'(x)<0$ فإن f تناقصية قطعا على I.
- إذا كان $\forall x\in I : f'(x)=0$ (على I بكامله) فإن f ثابتة على I.

3. برهان :

ليكن a و b من I مع $a<b$ لدينا : $[a,b]\subset I$ (لأن I مجال).
بمأن : f دالة قابلة للاشتقاق على مجال I إذن f قابلة للاشتقاق على $[x,y]$.
ومنه حسب مبرهنة T.A.F : $\exists C\in]a,b[\ : f(b)-f(a)=(b-a)f'(c)$.
حالة : $\forall x\in I : f'(x)\ge 0$ إذن : $f'(c)\ge 0$ و منه $(b-a)f'(c)\ge 0$ و بالتالي $f(b)-f(a)\ge 0$ أي $f(b)\ge f(a)$
خلاصة : f تزايدية على I.

4. ملحوظة : (يمكن للدالة ' f أن تنعدم في نقط منعزلة من I وهذا لا يؤثر على رتابة f)