

# الاتصال

## السلسلة 1 (10 تمارين)

التمرين 1 :

1. لتكن  $f$  الدالة المعرفة بما يلي :  

$$\begin{cases} f(x) = \frac{\sqrt{x+1}-1}{x} & ; x \neq 0 \\ f(0) = \frac{1}{2} \end{cases}$$
أدرس اتصال  $f$  في 0 .

2. نعتبر الدالة العددية  $f$  للمتغير الحقيقي  $x$  المعرفة بما يلي:  

$$\begin{cases} f(x) = \frac{x^2-5x+6}{x^2-x-2} & ; x \neq 2 \\ f(2) = -\frac{1}{3} \end{cases}$$

أدرس اتصال الدالة  $f$  في النقطة 2 .

3. لتكن  $f$  الدالة العددية المعرفة بما يلي:  

$$\begin{cases} f(x) = \frac{\sin x}{\sqrt{x+1}-1} & ; x \neq 0 \\ f(0) = 2 \end{cases}$$
أدرس اتصال الدالة  $f$  في 0 .

4. لتكن  $f$  الدالة العددية المعرفة بما يلي:  

$$\begin{cases} f(x) = x^2 + 2x + 3 & ; x \geq -2 \\ f(x) = \frac{x^2 + x - 2}{x + 2} & ; x < -2 \end{cases}$$
أدرس اتصال  $f$  في -2 .

5. نعتبر الدالة  $f$  المعرفة بما يلي :  

$$\begin{cases} f(x) = 2\frac{\sin(3x)}{x} + 1 & ; x > 0 \\ f(x) = x + m - \frac{1}{2} & ; x \leq 0 \end{cases}$$
حدد قيمة  $m$  لكي تكون  $f$  متصلة في 0 .

6. لتكن  $g$  الدالة العددية للمتغير الحقيقي  $x$  المعرفة بما يلي:  

$$\begin{cases} g(x) = x - k & ; x < 0 \\ g(0) = 2 \\ g(x) = 1 + \frac{\tan x}{x} & ; x > 0 \end{cases}$$
حيث  $k$  عدد حقيقي.

حدد قيمة  $k$  التي من أجلها تكون  $g$  متصلة في  $x_0 = 0$  .

## التمرين 2 :

1. نعتبر الدالة  $f$  المعرفة بما يلي :  $f(x) = \frac{x^3 - 8}{x - 2}$  ;  $x \neq 2$  : أدرس اتصال الدالة  $f$  على  $D_f$
2. نعتبر الدالة  $f$  المعرفة بما يلي :  $f(x) = x^5 - 6x^2 + 3x + 7$  : أدرس اتصال الدالة  $f$  على  $D_f$
3. نعتبر الدالة  $f$  المعرفة بما يلي :  $f(x) = 2\sin x + 3\cos x$  : أدرس اتصال الدالة  $f$  على  $D_f$
4. نعتبر الدالة  $f$  المعرفة بما يلي :  $f(x) = \sqrt{x^2 - 1}$  : أدرس اتصال الدالة  $f$  على  $D_f$
5. نعتبر الدالة  $f$  المعرفة بما يلي :  $f(x) = \frac{\sqrt{x}}{x^2 + 1}$  : أدرس اتصال الدالة  $f$  على  $D_f$
6. نعتبر الدالة  $f$  المعرفة بما يلي :  $f(x) = (x^2 - 3x + 4) \times \cos x$  : أدرس اتصال الدالة  $f$  على  $D_f$
7. لتكن  $f$  الدالة العددية المعرفة على  $\mathbb{R}$  كما يلي :  $f(x) = \frac{x^2 + x - 1}{x^2 + 1} + \sqrt{x^2 - x + 4}$  : أدرس اتصال الدالة  $f$  على  $\mathbb{R}$

## التمرين 3 :

بين أن المعادلة  $(E)$  تقبل على الأقل حلا في المجال  $I$  في الحالتين التاليتين:

$$1. I = [0, 1]; (E): x^5 - x^3 + 5x - 4 = 0$$

$$2. I = \left] \frac{\pi}{3}, \pi \right[; (E): 2\sin x = x$$

## التمرين 4 :

بين أن المعادلة  $x^3 + 2x - 4 = 0$  تقبل حلا وحيدا  $\alpha$  في المجال  $\left] 1, \frac{3}{2} \right[$

## التمرين 5 :

بين أن المعادلة  $2x^3 + 7x - 4 = 0$  تقبل حلا وحيدا  $\alpha$  في المجال  $\mathbb{R}$  و أن  $\frac{1}{2} < \alpha < 1$

## التمرين 6 :

لتكن  $f$  دالة عددية متصلة على مجال  $[a, b]$  بحيث :  $f(a) < ab$  و  $f(b) > b^2$  :  
بين أن :  $\exists c \in [a, b]: f(c) = bc$

## التمرين 7 :

- نعتبر الدالة العددية  $f$  المعرفة على  $\mathbb{R}$  بما يلي :  $f(x) = 2x^3 + x - 1$
1. بين أن المعادلة  $f(x) = 0$  تقبل حلا وحيدا  $\alpha$  في  $\mathbb{R}$  ثم تحقق أن  $0 < \alpha < 1$ .
  2. أدرس إشارة الدالة  $f$ .

**التمرين 8 :**

نعتبر الدالة العددية  $g$  المعرفة على  $\mathbb{R}$  كما يلي :  $g(x) = \sin x + 2\cos x$

1. تحقق من أن:  $g(0) > 0$  و  $g\left(\frac{\pi}{2}\right) < \frac{\pi}{2}$

2. أثبت أن المعادلة  $g(x) = x$  تقبل حلا على الأقل في المجال  $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$

**التمرين 9 :**

نعتبر الدالة العددية  $f$  المعرفة على  $\mathbb{R}$  بما يلي:  $f(x) = 4x^3 - 3x - \frac{1}{2}$

1. أحسب  $f(-1)$  و  $f\left(\frac{-1}{2}\right)$  و  $f(0)$  و  $f(1)$

2. استنتج أن المعادلة  $f(x) = 0$  تقبل على الأقل ثلاثة حلول في المجال  $[-1;1]$

**التمرين 10 :**

لتكن  $f$  دالة متصلة و معرفة من مجال  $[a;b]$  نحو  $[a;b]$ .

بين أن المعادلة  $f(x) = x$  تقبل حلا على الأقل في المجال  $[a;b]$

تصحيح التمرين 1:

$$\begin{cases} f(x) = \frac{\sqrt{x+1}-1}{x} ; x \neq 0 \\ f(0) = \frac{1}{2} \end{cases} \quad (1)$$

لندرس اتصال الدالة  $f$  في 0 :

لدينا :  $f(0) = \frac{1}{2}$  . لنحسب  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$  :

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x+1}-1}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\sqrt{x+1}-1)(\sqrt{x+1}+1)}{x(\sqrt{x+1}+1)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\sqrt{x+1})^2 - 1^2}{x(\sqrt{x+1}+1)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(x+1)-1}{x(\sqrt{x+1}+1)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{(\sqrt{x+1}+1)} = \frac{1}{2}$$

بما أن  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = f(0)$  فإن  $f$  متصلة في 0

$$\begin{cases} f(x) = \frac{x^2-5x+6}{x^2-x-2} ; x \neq 2 \\ f(2) = -\frac{1}{3} \end{cases} \quad (2)$$

لندرس اتصال  $f$  في 2 :

لدينا :  $f(2) = -\frac{1}{3}$  . لنحسب  $\lim_{x \rightarrow 2} f(x)$  :

$$\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2-5x+6}{x^2-x-2} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\cancel{(x-2)}(x-3)}{\cancel{(x-2)}(x+1)} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x-3}{x+1} = \frac{-1}{3}$$

بما أن  $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = f(2)$  فإن  $f$  متصلة في 2

$$\begin{cases} f(x) = \frac{\sin x}{\sqrt{x+1}-1} ; x \neq 0 \\ f(0) = 2 \end{cases} \quad (3)$$

لندرس اتصال الدالة  $f$  في 0 :

لدينا :  $f(0) = 2$  . لنحسب  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$  :

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{\sqrt{x+1}-1} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x \cdot (\sqrt{x+1}+1)}{(\sqrt{x+1}-1)(\sqrt{x+1}+1)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x \cdot (\sqrt{x+1}+1)}{(\sqrt{x+1})^2 - 1^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x \cdot (\sqrt{x+1}+1)}{(x+1)-1} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} \cdot (\sqrt{x+1}+1) = 1 \times 2 = 2$$

بما أن  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = f(0)$  فإن  $f$  متصلة في 0

$$\begin{cases} f(x) = x^2 + 2x - 3; x \geq -2 \\ f(x) = \frac{x^2 + x - 2}{x + 2}; x < -2 \end{cases} \quad (4)$$

لندرس اتصال الدالة  $f$  في -2 :

$$f(-2) = (-2)^2 + 2(-2) - 3 = -3$$

$$\lim_{\substack{x \rightarrow -2 \\ x > -2}} f(x) = \lim_{\substack{x \rightarrow -2 \\ x > -2}} x^2 + 2x - 3 = -3$$

$$\lim_{\substack{x \rightarrow -2 \\ x < -2}} f(x) = \lim_{\substack{x \rightarrow -2 \\ x < -2}} \frac{x^2 + x - 2}{x + 2} = \lim_{\substack{x \rightarrow -2 \\ x < -2}} \frac{(x+2)(x-1)}{\cancel{x+2}} = \lim_{\substack{x \rightarrow -2 \\ x < -2}} x - 1 = -3$$

بما أن  $\lim_{\substack{x \rightarrow -2 \\ x > -2}} f(x) = \lim_{\substack{x \rightarrow -2 \\ x < -2}} f(x) = f(-2)$  فإن  $f$  متصلة في -2

$$\text{لنحدد قيمة } m \text{ لكي تكون } f \text{ متصلة في } 0. \begin{cases} f(x) = 2 \frac{\sin(3x)}{x} + 1 & ; x > 0 \\ f(x) = x + m - \frac{1}{2} & ; x \leq 0 \end{cases} \quad (5)$$

$$f(0) = (0) + m - \frac{1}{2} = m - \frac{1}{2} \quad \text{لدينا}$$

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x < 0}} f(x) = \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x < 0}} x + m - \frac{1}{2} = m - \frac{1}{2}$$

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} f(x) = \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} 2 \frac{\sin(3x)}{x} + 1 = \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} 2 \times 3 \times \frac{\sin(3x)}{3x} + 1 = 2 \times 3 \times 1 + 1 = 6 + 1 = 7$$

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} f(x) = \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x < 0}} f(x) = f(0) \quad \text{تعني } 0 \text{ متصلة في } f$$

$$\text{تعني } 7 = m - \frac{1}{2} \quad \text{أي } m = 7 + \frac{1}{2} \quad \text{أي } m = \frac{15}{2}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} g(x) = x - k \quad ; x < 0 \\ g(0) = 2 \\ g(x) = 1 + \frac{\tan x}{x} \quad ; x > 0 \end{array} \right. \quad (6)$$

لنحدد قيمة  $k$  لكي تكون  $g$  متصلة في  $0$ .

$$g(0) = 2 \text{ لدينا}$$

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x < 0}} g(x) = \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x < 0}} x - k = -k$$

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} g(x) = \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} 1 + \frac{\tan(x)}{x} = 1 + 1 = 2$$

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} g(x) = \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x < 0}} g(x) = g(0) \text{ تعني } 0$$

$$-k = 2 \text{ أي } k = -2$$

## تصحيح التمرين 2:

$$\left\{ \begin{array}{l} f(x) = \frac{x^3 - 8}{x - 2} \quad ; x \neq 2 \\ f(2) = 12 \end{array} \right. \quad 1. \text{ لدينا}$$

$$D_f = (\{x \in \mathbb{R} / x - 2 \neq 0\}) \cup \{2\} = (\{x \in \mathbb{R} / x \neq 2\}) \cup \{2\} = (\mathbb{R} / \{2\}) \cup \{2\} = \mathbb{R} : D_f$$

• الدالة  $f$  متصلة على  $\mathbb{R} / \{2\}$  (لأن  $f$  دالة جذرية)

• لندرس اتصال  $f$  في  $2$  : لدينا  $f(2) = 12$

لنحسب  $\lim_{x \rightarrow 2} f(x)$  :

$$\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3 - 8}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3 - 2^3}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x - 2)(x^2 + 2x + 2^2)}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2} x^2 + 2x + 4 = 12$$

بما أن  $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = f(2)$  فإن  $f$  متصلة في  $2$ .

خلاصة: الدالة  $f$  متصلة على  $\mathbb{R}$ .

$$2. \text{ لدينا } f(x) = x^5 - 6x^2 + 3x + 7$$

الدالة  $f$  متصلة على  $\mathbb{R}$  (لأنها دالة حدودية)

$$3. \text{ لدينا } f(x) = 2 \sin x + 3 \cos x$$

$$f_1: x \mapsto 2 \sin x \text{ متصلة على } \mathbb{R}$$



$(\forall x \in \mathbb{R}) f_3(x) \geq 0$  و  $f_3: x \mapsto x^2 - x + 4$  متصلة على  $\mathbb{R}$

• إذن  $k = \sqrt{f_3}$  متصلة على  $\mathbb{R}$

❖ وبالتالي :  $f = h + k$  متصلة على  $\mathbb{R}$  كمجموع دالتين متصلتين على  $\mathbb{R}$

### تصحيح التمرين 3:

1. لنبين أن المعادلة  $(E): x^5 - x^3 + 5x - 4 = 0$  تقبل حلا على الأقل في المجال  $[0,1]$

نعتبر الدالة  $f: x \mapsto x^5 - x^3 + 5x - 4$

✓ الدالة  $f$  متصلة على المجال  $[0,1]$

$$\begin{cases} f(0) = -4 \\ f(1) = 1 \end{cases} \Rightarrow f(0) \times f(1) < 0 \quad \checkmark$$

إذن حسب مبرهنة القيم الوسيطة : المعادلة  $f(x) = 0$  تقبل حلا على الأقل في المجال  $[0,1]$

2. لنبين أن المعادلة  $(E): 2\sin x = x$  تقبل حلا على الأقل في المجال  $I = \left] \frac{\pi}{3}, \pi \right[$

$$(2\sin x = x \Leftrightarrow 2\sin x - x = 0)$$

نعتبر الدالة  $f: x \mapsto 2\sin x - x$

✓ الدالة  $f$  متصلة على المجال  $\left] \frac{\pi}{3}, \pi \right[$

$$\begin{cases} f\left(\frac{\pi}{3}\right) = \sqrt{3} - \frac{\pi}{3} = \frac{3\sqrt{3} - \pi}{3} > 0 \\ f(\pi) = -\pi < 0 \end{cases} \Rightarrow f\left(\frac{\pi}{3}\right) \times f(\pi) < 0 \quad \checkmark$$

إذن حسب مبرهنة القيم الوسيطة المعادلة  $f(x) = 0$  تقبل حلا على الأقل في المجال  $\left] \frac{\pi}{3}, \pi \right[$

و منه المعادلة  $(E)$  تقبل حلا على الأقل في المجال  $\left] \frac{\pi}{3}, \pi \right[$

### تصحيح التمرين 4 :

لنبين أن المعادلة  $x^3 + 2x - 4 = 0$  تقبل حلا وحيدا  $\alpha$  في المجال  $\left] 1, \frac{3}{2} \right[$

نعتبر الدالة  $f: x \mapsto x^3 + 2x - 4$



✓ الدالة  $f$  متصلة على المجال  $\left[1, \frac{3}{2}\right]$

✓ الدالة  $f$  قابلة للاشتقاق على المجال  $\left[1, \frac{3}{2}\right]$

$$f'(x) = (x^3 + 2x - 4)' = 3x^2 + 2 \quad \text{ليكن } x \in \left[1, \frac{3}{2}\right]$$

$$\left( \forall x \in \left[1, \frac{3}{2}\right] \right) f'(x) > 0 \quad \text{إذن :}$$

إذن الدالة  $f$  تزايدية قطعاً على  $\left[1, \frac{3}{2}\right]$

$$\begin{cases} f(1) = -1 \\ f\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{19}{8} \end{cases} \Rightarrow \underline{\underline{f(1) \times f\left(\frac{3}{2}\right) < 0}} \quad \checkmark$$

إذن حسب مبرهنة القيم الوسيطة بالوحدانية المعادلة  $f(x) = 0$  تقبل حلاً وحيداً في المجال

$$\left[1, \frac{3}{2}\right]$$

### تصحيح التمرين 5:

لنبين أن المعادلة  $2x^3 + 7x - 4 = 0$  تقبل حلاً وحيداً  $\alpha$  في المجال  $\mathbb{R}$  وأن  $\frac{1}{2} < \alpha < 1$

أولاً : لنبين أن المعادلة  $2x^3 + 7x - 4 = 0$  تقبل حلاً وحيداً  $\alpha$  في المجال  $\mathbb{R}$

نضع :  $f : x \mapsto 2x^3 + 7x - 4$

✓ الدالة  $f$  متصلة على  $\mathbb{R}$

✓ الدالة  $f$  قابلة للاشتقاق على المجال  $\mathbb{R}$

$$\text{ليكن } x \in \mathbb{R} : f'(x) = (2x^3 + 7x - 4)' = 6x^2 + 7$$

$$\text{إذن : } (\forall x \in \mathbb{R}) f'(x) > 0$$

إذن الدالة  $f$  تزايدية قطعاً على  $\mathbb{R}$

$$\checkmark \text{ لنحسب } f(\mathbb{R}) = f(]-\infty, +\infty[) = \left] \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x), \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) \right[ = ]-\infty, +\infty[ = \mathbb{R}$$

$$\underline{\underline{0 \in f(\mathbb{R})}} \quad \text{إذن}$$

و بالتالي المعادلة  $f(x) = 0$  تقبل حلا وحيدا  $\alpha$  في المجال  $\mathbb{R}$

ثانيا : لنبين أن  $\frac{1}{2} < \alpha < 1$

✓ الدالة  $f$  متصلة على  $\left[\frac{1}{2}, 1\right]$

$$\begin{cases} f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{-1}{4} \\ f(1) = 5 \end{cases} \Rightarrow f\left(\frac{1}{2}\right) \times f(1) < 0 \quad \checkmark$$

إذن حسب مبرهنة القيم الوسيطة :  $\frac{1}{2} < \alpha < 1$

### تصحيح التمرين 6:

نعتبر الدالة  $g$  المعرفة على  $[a, b]$  بما يلي :  $g(x) = f(x) - bx$

الدالة  $g$  متصلة على  $[a, b]$  ( كمجموع دالتين متصلتين على  $[a, b]$  : حسب المعطيات  $f$  دالة عددية متصلة

على مجال  $[a, b]$  و  $x \mapsto -bx$  متصلة على  $\mathbb{R}$  بالخصوص على  $[a, b]$  )

لدينا  $g(a) = f(a) - ba$  و بما أن  $f(a) < ab$  فإن  $f(a) - ab < 0$  و منه  $g(a) < 0$

لدينا  $g(b) = f(b) - b^2$  و بما أن  $f(b) > b^2$  فإن  $f(b) - b^2 > 0$  و منه  $g(b) > 0$

إذن  $g(a) \times g(b) < 0$

و بالتالي حسب مبرهنة القيم الوسيطة : يوجد  $c$  من  $[a, b]$  بحيث  $g(c) = 0$

و منه يوجد  $c$  من  $[a, b]$  بحيث  $f(c) - bc = 0$

أي يوجد  $c$  من  $[a, b]$  بحيث  $f(c) = bc$

### تصحيح التمرين 7:

1. نضع  $f : x \mapsto 2x^3 + x - 1$

أولا : لنبين أن المعادلة  $2x^3 + x - 1 = 0$  تقبل حلا وحيدا  $\alpha$  في المجال  $\mathbb{R}$

✓ الدالة  $f$  متصلة على  $\mathbb{R}$

✓ الدالة  $f$  قابلة للاشتقاق على المجال  $\mathbb{R}$

ليكن  $f'(x) = (2x^3 + x - 1)' = 6x^2 + 1 : x \in \mathbb{R}$

إذن :  $(\forall x \in \mathbb{R}) f'(x) > 0$

إذن الدالة  $f$  تزايدية قطعاً على  $\mathbb{R}$

✓ لنحسب  $f(\mathbb{R}) = f(]-\infty, +\infty[) = \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x), \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = ]-\infty, +\infty[ = \mathbb{R}$  : إذن  $0 \in f(\mathbb{R})$   
و بالتالي المعادلة  $f(x) = 0$  تقبل حلا وحيدا  $\alpha$  في المجال  $\mathbb{R}$

ثانيا : لنبين أن  $0 < \alpha < 1$

✓ الدالة  $f$  متصلة على  $[0, 1]$

$$\begin{cases} f(0) = -1 \\ f(1) = 2 \end{cases} \Rightarrow \underline{f(0) \times f(1) < 0} \quad \checkmark$$

إذن حسب مبرهنة القيم الوسيطة :  $0 < \alpha < 1$

2. لندرس إشارة الدالة  $f$  :

الحالة 1: إذا كان  $x \leq \alpha$

لدينا الدالة  $f$  تزايدية قطعا على  $\mathbb{R}$  إذن  $f(x) \leq f(\alpha)$  و منه  $f(x) \leq 0$

(  $\alpha$  حل للمعادلة  $f(x) = 0$  إذن  $f(\alpha) = 0$  )

الحالة 2: إذا كان  $x \geq \alpha$

لدينا الدالة  $f$  تزايدية قطعا على  $\mathbb{R}$  إذن  $f(x) \geq f(\alpha)$  و منه  $f(x) \geq 0$

### تصحيح التمرين 8:

1. لدينا  $g(0) = \sin(0) + 2\cos(0) = (0) + 2 \times (1) = 2 > 0$  إذن  $g(0) > 0$

لدينا  $g\left(\frac{\pi}{2}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) + 2\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) = (1) + 2 \times (0) = 1 < 1$  إذن  $g\left(\frac{\pi}{2}\right) < 1$

2. لنبين أن المعادلة  $g(x) = x$  تقبل حلا على الأقل في المجال  $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$

نعتبر الدالة  $h$  المعرفة على  $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$  بما يلي :  $h(x) = g(x) - x$

✓ الدالة  $h$  متصلة على  $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$  ( كمجموع دالتين متصلتين على  $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$  )

$$\begin{cases} h(0) = g(0) > 0 \\ h\left(\frac{\pi}{2}\right) = g\left(\frac{\pi}{2}\right) - \frac{\pi}{2} < 1 - \frac{\pi}{2} < 0 \end{cases} \Rightarrow h(0) \times h\left(\frac{\pi}{2}\right) < 0 \quad \checkmark$$

إذن حسب مبرهنة القيم الوسيطة : المعادلة  $h(x) = 0$  تقبل حلا على الأقل في المجال  $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$

و منه المعادلة  $g(x) = x$  تقبل حلا على الأقل في المجال  $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$

### تصحيح التمرين 9:

$$f(-1) = 4(-1)^3 - 3(-1) - \frac{1}{2} = -4 + 3 - \frac{1}{2} = -\frac{3}{2} \quad (1)$$

$$f\left(\frac{-1}{2}\right) = 4\left(\frac{-1}{2}\right)^3 - 3\left(\frac{-1}{2}\right) - \frac{1}{2} = 4\left(\frac{-1}{8}\right) + \frac{3}{2} - \frac{1}{2} = \frac{-1}{2} + \frac{3}{2} - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

$$f(0) = 4(0)^3 - 3(0) - \frac{1}{2} = -\frac{1}{2}$$

$$f(1) = 4(1)^3 - 3(1) - \frac{1}{2} = 4 - 3 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

(2)

➤ الدالة  $f$  متصلة على  $\left[-1, -\frac{1}{2}\right]$  و  $f(-1) \times f\left(\frac{-1}{2}\right) < 0$  إذن حسب مبرهنة القيم الوسيطة المعادلة

$$f(x) = 0 \text{ تقبل حلا على الأقل في } \left[-1, -\frac{1}{2}\right]$$

➤ الدالة  $f$  متصلة على  $\left[-\frac{1}{2}, 0\right]$  و  $f\left(\frac{-1}{2}\right) \times f(0) < 0$  إذن حسب مبرهنة القيم الوسيطة المعادلة

$$f(x) = 0 \text{ تقبل حلا على الأقل في } \left[-\frac{1}{2}, 0\right]$$

➤ الدالة  $f$  متصلة على  $[0, 1]$  و  $f(0) \times f(1) < 0$  إذن حسب مبرهنة القيم الوسيطة المعادلة  $f(x) = 0$

تقبل حلا على الأقل في  $[0, 1]$

❖ خلاصة: المعادلة  $f(x) = 0$  تقبل على الأقل ثلاثة حلول في المجال  $[-1; 1]$

### تصحيح التمرين 10:

نعتبر الدالة  $g$  المعرفة على  $[a, b]$  بما يلي:  $g(x) = f(x) - x$

✓ الدالة  $g$  متصلة على  $[a, b]$  ( كمجموع دالتين متصلتين على  $[a, b]$  )

✓ بما أن  $f$  دالة معرفة من  $[a, b]$  نحو  $[a, b]$  فإن  $f(a) \in [a, b]$  و  $f(b) \in [a, b]$

و منه  $a \leq f(a)$  و  $f(b) \leq b$  أي  $f(a) - a \geq 0$  و  $f(b) - b \leq 0$  إذن  $g(a) \geq 0$  و  $g(b) \leq 0$

و بالتالي:  $g(a) \times g(b) \leq 0$

إذن حسب مبرهنة القيم الوسيطة : المعادلة  $g(x)=0$  تقبل حلا على الأقل في المجال  $[a;b]$   
و بالتالي : المعادلة  $f(x)=x$  تقبل حلا على الأقل في المجال  $[a;b]$  .

つづく