التمرين الأول (3 نقط):

في الفضاء المنسوب إلى معلم متعامد ممنظم مباشر $(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$، نعتبر النقط $A(1,-1,-1)$ و $B(0,-2,1)$ و $C(1,-2,0)$

1) أ) بين أن $\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}=\vec{i}+\vec{j}+\vec{k}$	0.75
ب) استنتج أن $x+y+z+1=0$ هي معادلة ديكارتية للمستوى (ABC)	0.5
2) لتكن (S) الفلكة التي معادلتها $x^2+y^2+z^2-4x+2y-2z+1=0$	
بين أن مركز الفلكة (S) هو النقطة $\Omega(2,-1,1)$ و أن شعاعها هو $R=\sqrt{5}$	0.75
3) أ) أحسب $d(\Omega,(ABC))$ مسافة النقطة Ω عن المستوى (ABC)	0.5
ب) استنتج أن المستوى (ABC) يقطع الفلكة (S) وفق دائرة (Γ) (تحديد مركز وشعاع (Γ) غير مطلوب)	0.5

التمرين الثاني (3 نقط) :

1) حل في مجموعة الأعداد العقدية $\mathbb{C}$ المعادلة : $z^2-2z+4=0$	0.75
2) في المستوى العقدي المنسوب إلى معلم متعامد ممنظم مباشر $(O,\vec{u},\vec{v})$، نعتبر النقط A و B و C و D التي ألحاقها على التوالي هي : $a=1-i\sqrt{3}$ و $b=2+2i$ و $c=\sqrt{3}+i$ و $d=-2+2\sqrt{3}$	
أ) تحقق أن $a-d=-\sqrt{3}(c-d)$	0.5
ب) استنتج أن النقط A و C و D مستقيمية .	0.25
3) ليكن z لحق نقطة M و z' لحق النقطة M' صورة النقطة M بالدوران R الذي مركزه O و زاويته $\frac{-\pi}{3}$	
تحقق أن $z'=\frac{1}{2}az$	0.5
4) لتكن H صورة النقطة B بالدوران R ، و h لحقها ، و P النقطة التي لحقها p حيث $p=a-c$	
أ) تحقق أن $h=ip$	0.5
ب) بين أن المثلث OHP قائم الزاوية و متساوي الساقين في O	0.5

التمرين الثالث (3 نقط) :

يحتوي صندوق على عشر كرات : ثلاث كرات خضراء و ست كرات حمراء و كرة واحدة سوداء لا يمكن التمييز بينها باللمس .

نسحب عشوائيا و تآنيا ثلاث كرات من الصندوق .

نعتبر الأحداث التالية : A :" الحصول على ثلاث كرات خضراء "

و B : " الحصول على ثلاث كرات من نفس اللون "

و C : " الحصول على كرتين على الأقل من نفس اللون "

1) بين أن : $p(A)=\frac{1}{120}$ و $p(B)=\frac{7}{40}$	2
2) أحسب $p(C)$	1

المسألة (11 نقطة) :

الجزء الأول :

نعتبر الدالة العددية f المعرفة على $]0,+\infty[$ بما يلي : $f(x)=x+\frac{1}{2}-\ln x+\frac{1}{2}(\ln x)^2$

و (C) المنحنى الممثل للدالة f في معلم متعامد ممنظم $(O,\vec{i},\vec{j})$ (الوحدة 1cm)

1) احسب $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} f(x)$ ثم أول النتيجة هندسيا	0.5
2) أ) تحقق أن لكل x من المجال $]0,+\infty[$: $f(x)=x+\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{2}\ln x-1\right)\ln x$	0.25
ب) استنتج أن $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$	0.5
ج) بين لكل x من المجال $]0,+\infty[$: $\frac{(\ln x)^2}{x}=4\left(\frac{\ln\sqrt{x}}{\sqrt{x}}\right)^2$ ثم استنتج أن : $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{(\ln x)^2}{x}=0$	0.5
د) بين أن المنحنى (C) يقبل فرعا شلجميا بجوار $+\infty$ اتجاهه المقارب المستقيم (Δ) الذي معادلته $y=x$	0.75
3) أ) بين أن لكل x من $]0,1]$: $(x-1)+\ln x\leq 0$ و أن لكل x من $[1,+\infty[$: $(x-1)+\ln x\geq 0$	0.5
ب) بين أن لكل x من $]0,+\infty[$: $f'(x)=\frac{x-1+\ln x}{x}$	1
ج) ضع جدول تغيرات الدالة f	0.5
4)أ) بين أن $f''(x)=\frac{2-\ln x}{x^2}$ لكل x من $]0,+\infty[$	0.5
ب) استنتج أن المنحنى (C) يقبل نقطة انعطاف يتم تحديد زوج إحداثيتيها	0.5
5) أ) بين أن لكل x من $]0,+\infty[$ ، $f(x)-x=\frac{1}{2}(\ln x-1)^2$ و استنتج الوضع النسبي للمنحنى (C) و المستقيم (Δ)	0.5
ب) أنشئ (Δ) و (C) في نفس المعلم $(O,\vec{i},\vec{j})$	1
6) أ) بين أن الدالة $H:x\mapsto x\ln x-x$ هي دالة أصلية للدالة $h:x\mapsto \ln x$ على المجال $]0,+\infty[$	0.5
ب) باستعمال مكاملة بالأجزاء بين أن $\int_1^e(\ln x)^2dx=e-2$	0.75
ج) احسب ب cm^2 مساحة حيز المستوى المحصور بين (C) و (Δ) والمستقيمين اللذين معادلتاهما $x=1$ و $x=e$	0.5

الجزء الثاني :

لتكن (u_n) المتتالية العددية المعرفة كما يلي : $u_0=1$ و $u_{n+1}=f(u_n)$ لكل n من $I\!N$

1) أ) بين بالترجع أن لكل n من $I\!N$ $1\leq u_n\leq e$	0.5
ب) بين أن المتتالية (u_n) تزايدية	0.5
ج) استنتج أن المتتالية (u_n) متقاربة	0.5
2) أحسب نهاية المتتالية (u_n)	0.75

تصحيح الامتحان الوطني الموحد
للبكالوريا - الدورة العادية 2019
مادة الرياضيات
شعبة العلوم التجريبية بمسالكها

التمرين الأول:

1) أ- لدينا $\vec{AB}(0-1\,;\,-2-(-1)\,;\,1-(-1))$

أي $\vec{AB}(-1\,;\,-1\,;\,2)$

و $\vec{AC}(1-1\,;\,-2-(-1)\,;\,0-(-1))$

أي $\vec{AC}(0\,;\,-1\,;\,1)$

إذن:

$$\vec{AB}\wedge\vec{AC}=\begin{vmatrix}-1 & -1\\ 2 & 1\end{vmatrix}\vec{i}-\begin{vmatrix}-1 & 0\\ 2 & 1\end{vmatrix}\vec{j}+\begin{vmatrix}-1 & 0\\ -1 & -1\end{vmatrix}\vec{k}$$

$$=(-1\times1-(-1)\times2)\vec{i}-(-1\times1-0\times2)\vec{j}+(-1\times(-1)-0\times(-1))\vec{k}$$

$$=1\vec{i}+1\vec{j}+1\vec{k}$$

$$=\vec{i}+\vec{j}+\vec{k}$$

ب- الطريقة الأولى:

نعلم أن المتجهة $\vec{AB}\wedge\vec{AC}$ منظمية على المستوى (ABC)

إذن المستوى (ABC) له معادلة ديكارتية تكتب على الشكل: $1x+1y+1z+d=0$

ولدينا $x_A+y_A+z_A+d=0$

$1-1-1+d=0$

$d=1$

إذن $(ABC): x+y+z+1=0$

الطريقة الثانية:

المستوى (ABC) هو مجموعة النقط $M(x;y;z)$ من الفضاء حيث: $(\vec{AB}\wedge\vec{AC}).\vec{AM}=0$

$(\vec{AB}\wedge\vec{AC}).\vec{AM}=0 \Leftrightarrow 1(x-1)+1(y+1)+1(z+1)=0$

$\Leftrightarrow x-1+y+1+z+1=0$

$\Leftrightarrow x+y+z+1=0$

إذن $x+y+z+1=0$ معادلة ديكارتية للمستوى (ABC).

2) الطريقة الأولى

لدينا (S) فلكة معادلتها:

$$x^2+y^2+z^2-4x+2y-2z+1=0$$

ولدينا $x^2-4x=(x-2)^2-4$

$y^2+2y=(y+1)^2-1$

$z^2-2z=(z-1)^2-1$

إذن $x^2+y^2+z^2-4x+2y-2z+1=0$

$\Leftrightarrow (x-2)^2-4+(y+1)^2-1+(z-1)^2-1+1=0$

$\Leftrightarrow (x-2)^2+(y+1)^2+(z-1)^2=5$

إذن مركز الفلكة هو النقطة: $\Omega(2;-1;1)$

وشعاعها $R=\sqrt{5}$

الطريقة الثانية:

لدينا (S) فلكة معادلتها:

$$x^2+y^2+z^2-4x+2y-2z+1=0$$

إذن مركز (S) هو: $\Omega\left(-\frac{(-4)}{2}\,;\,-\frac{2}{2}\,;\,-\frac{(-2)}{2}\right)$

أي $\Omega(2\,;\,-1\,;\,1)$

وشعاع (S) هو: $R=\frac{\sqrt{(-4)^2+2^2+(-2)^2-4\times1}}{2}$

$=\frac{\sqrt{20}}{2} = {}^{2}\sqrt{5}$

3) ج- $d(\Omega;(ABC)) = \frac{|x_\Omega+y_\Omega+z_\Omega+1|}{\sqrt{1^2+1^2+1^2}}$

$= \frac{|2-1+1+1|}{\sqrt{3}}$

$= \frac{3}{\sqrt{3}} = \sqrt{3}$

ب- لدينا $d(\Omega;(ABC)) < R$

لأن $d(\Omega;(ABC)) = \sqrt{3}$

و $R = \sqrt{5}$

إذن المستوى (ABC) يقطع الفلكة (S) وفق دائرة (Γ).

التمرين الثاني.

1) نعتبر المعادلة: $z^2-2z+4=0$

$\Delta = (-2)^2 - 4\times1\times4$

$= 4-16$

$= -12$

لدينا $\Delta<0$ إذن المعادلة $z^2-2z+4=0$ تقبل حلين عقديين مترافقين:

$z_1 = \frac{2+\sqrt{12}\,i}{2\times1}$

$= \frac{2+2\sqrt{3}\,i}{2}$

$= \frac{2(1+\sqrt{3}\,i)}{2}$

$= 1+\sqrt{3}\,i$

$z_2 = \overline{z_1} = \overline{1+\sqrt{3}\,i} = 1-\sqrt{3}\,i$

إذن $S = \{1+\sqrt{3}\,i \,;\, 1-\sqrt{3}\,i\}$

2) ج- الطريقة الأولى:

$a-d = 1-i\sqrt{3}-(-2+2\sqrt{3})$

$a-d = 1-i\sqrt{3}+2-2\sqrt{3}$

$= 3-2\sqrt{3}-i\sqrt{3}$

$= \sqrt{3}(-\sqrt{3}+2+i)$

$= -\sqrt{3}(\sqrt{3}-\sqrt{3}-\sqrt{3}+2+i)$

$= -\sqrt{3}(\sqrt{3}+i-2\sqrt{3}+2)$

$= -\sqrt{3}(\sqrt{3}+i-(2\sqrt{3}-2))$

$= -\sqrt{3}(c-d)$

الطريقة الثانية:

$-\sqrt{3}(c-d) = -\sqrt{3}(\sqrt{3}+i-(-2+2\sqrt{3}))$

$= -\sqrt{3}(\sqrt{3}+i+2-2\sqrt{3})$

$= -\sqrt{3}(2-\sqrt{3}+i)$

$= -2\sqrt{3}+3-\sqrt{3}\,i$

$= -2\sqrt{3}+1+2-\sqrt{3}\,i$

$= 1-\sqrt{3}\,i-(2\sqrt{3}-2)$

$= a-d.$

ب- لدينا $a-d = -\sqrt{3}(c-d)$

$\frac{a-d}{c-d} = -\sqrt{3}$

بما أن $\frac{a-d}{c-d} \in \mathbb{R}$

فإن النقط A و C و D مستقيمية

ويمكن إضافة:

لدينا $\frac{a-d}{c-d} = -\sqrt{3}$

إذن $\arg\left(\frac{a-d}{c-d}\right) = \pi\ [2\pi]$

أي أن $(\overrightarrow{DC};\overrightarrow{DA}) = \pi\ [2\pi]$

إذن $\overrightarrow{DA}$ و $\overrightarrow{DC}$ متجهتين مستقيميتين

ومنه النقط A و C و D مستقيمية

③ لدينا $M'(z')$ صورة $M(z)$ بالدوران R

الذي مركزه O وزاويته $-\frac{\pi}{3}$

يعني أن: $\begin{cases} OM = OM' \\ (\overrightarrow{OM};\overrightarrow{OM'}) \equiv -\frac{\pi}{3}\,[2\pi] \end{cases}$

" " $\begin{cases} |z| = |z'| \\ \arg\left(\frac{z'}{z}\right) \equiv -\frac{\pi}{3}\,[2\pi] \end{cases}$

$\begin{cases} \left|\frac{z'}{z}\right| = 1 \\ \arg\left(\frac{z'}{z}\right) \equiv -\frac{\pi}{3}\,[2\pi] \end{cases}$

$\frac{z'}{z} = [1; -\frac{\pi}{3}]$

$z' = \left(\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)\right) z$

$z' = \left(\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i\right) z$

$= \frac{1}{2}(1 - \sqrt{3}i) z$

$= \frac{1}{2} a z$

ويمكن الإجابة على الشكل الآتي:

$R(M) = M' \iff z' = e^{i\left(-\frac{\pi}{3}\right)}(z - z_O) + z_O$

$\iff z' = \left(\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)\right) z$

$\iff z' = \left(\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i\right) z$

$\iff z' = \frac{1}{2}(1 - \sqrt{3}i) z$

$\iff z' = \frac{1}{2} a z$

4) 1- لدينا $H(h)$ صورة النقطة $B(b)$ بالدوران R.

إذن $h = \frac{1}{2} ab$

$= \frac{1}{2}(1 - \sqrt{3}i)(2 + 2i)$

$= \frac{1}{2}(2 + 2i - 2\sqrt{3}i - 2\sqrt{3}i^2)$

$h = \frac{1}{2}(2 + 2i - 2\sqrt{3}i + 2\sqrt{3})$

$= \frac{1}{2} \times 2(1 + i - \sqrt{3}i + \sqrt{3})$

$= 1 + i - \sqrt{3}i + \sqrt{3}$

$= i\left(\frac{1}{i} + 1 - \sqrt{3} + \frac{\sqrt{3}}{i}\right)$

$= i(-i + 1 - \sqrt{3} - \sqrt{3}i)$

$= i(1 - \sqrt{3}i - (\sqrt{3} + i))$

$= i(a - c)$

$= ip$

ب- لدينا $h = ip$

يعني أن $\frac{h}{p} = i$

إذن $\frac{h}{p} = [1; \frac{\pi}{2}]$

$\begin{cases} \left|\frac{h}{p}\right| = 1 \\ \arg\left(\frac{h}{p}\right) \equiv \frac{\pi}{2}\,[2\pi] \end{cases}$ "

$\begin{cases} |h| = |p| \\ \arg\left(\frac{h}{p}\right) \equiv \frac{\pi}{2}\,[2\pi] \end{cases}$ "

$\begin{cases} |h - z_O| = |p - z_O| \\ \arg\left(\frac{h - z_O}{p - z_O}\right) \equiv \frac{\pi}{2}\,[2\pi] \end{cases}$ "

$\begin{cases} OH = OP \\ (\overrightarrow{OP}, \overrightarrow{OH}) \equiv \frac{\pi}{2}\,[2\pi] \end{cases}$ "

إذن المثلث OHP قائم الزاوية ومتساوي الساقين في O.

التمرين الثالث :

3 V
6 R
1 N

1) عدد الكرات داخل الصندوق هو 10
بما أننا نسحب ثلاث كرات تآنيا فإن

$$card(\Omega) = C_{10}^{3} = \frac{10\times 9\times 8}{3\times 2\times 1} = 120$$

A: "الحصول على ثلاث كرات خضراء"

VVV

$$card(A) = C_3^3 = 1$$

$$p(A) = \frac{card(A)}{card(\Omega)} = \frac{1}{120}$$

B: "الحصول على ثلاث كرات من نفس اللون"

RRR أو VVV

$$card(B) = C_3^3 + C_6^3 = 1 + \frac{6\times 5\times 4}{3\times 2\times 1} = 1 + 20 = 21$$

$$p(B) = \frac{card(B)}{card(\Omega)} = \frac{21}{120} = \frac{7}{40}$$

2) الطريقة الأولى:

C: "الحصول على كرتين على الأقل من نفس اللون"

RRR أو VVV أو $RR\bar{R}$ أو $VV\bar{V}$

$$card(C) = C_3^2\times C_7^1 + C_6^2\times C_4^1 + C_3^3 + C_6^3$$

$$= \frac{3\times 2}{2\times 1}\times 7 + \frac{6\times 5}{2\times 1}\times 4 + 1 + 20$$

$$= 3\times 7 + 15\times 4 + 1 + 20$$

$$= 21 + 60 + 1 + 20$$

$$= 102$$

$$p(C) = \frac{card(C)}{card(\Omega)} = \frac{102}{120} = \frac{17}{20}$$

الطريقة الثانية:

الحدث المضاد لـ C.

$\bar{C}$: "الحصول على كرة من كل لون" أو $\bar{C}$: "الحصول على ثلاث كرات مختلفة اللون مثنى مثنى"

NVR

$$p(\bar{C}) = \frac{card(\bar{C})}{card(\Omega)} = \frac{C_1^1\times C_3^1\times C_6^1}{120} = \frac{1\times 3\times 6}{120} = \frac{18}{120} = \frac{3}{20}$$

$$p(C) = 1 - p(\bar{C}) = 1 - \frac{3}{20} = \frac{17}{20}$$

المسألة: الجزء الأول

1) $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x>0}} f(x) = \lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x>0}} x + \frac{1}{2} - \ln x + \frac{1}{2}(\ln x)^2$

$= 0 + \frac{1}{2} - (-\infty) + \frac{1}{2}(+\infty)$

$= \frac{1}{2} + \infty + \infty$

$= +\infty$

لأن $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x>0}} \ln x = -\infty$

و $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x>0}} (\ln x)^2 = +\infty$

إذن (C) يقبل مقاربا عموديا هو المستقيم الذي معادلته $x=0$.

2) أ- ليكن x من $]0;+\infty[$

$f(x) = x + \frac{1}{2} + \frac{1}{2}(\ln x)^2 - \ln x$

$= x + \frac{1}{2} + \ln x\left(\frac{1}{2}\ln x - 1\right)$

لأن $(\ln x)^2 = \ln x \times \ln x$

أو $f(x) = x + \frac{1}{2} - \ln x + \frac{1}{2}(\ln x)^2$

$= x + \frac{1}{2} - \ln x + \frac{1}{2}\ln x \times \ln x$

$= x + \frac{1}{2} + \ln x\left(-1 + \frac{1}{2}\ln x\right)$

$= x + \frac{1}{2} + \ln x\left(\frac{1}{2}\ln x - 1\right)$

ب-

$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} x + \frac{1}{2} + \ln x\left(\frac{1}{2}\ln x - 1\right)$

$= +\infty + \frac{1}{2} + \infty(+\infty - 1)$

$= +\infty + \frac{1}{2} + \infty \times (+\infty)$

$= +\infty$

لأن $\lim\limits_{x \to +\infty} \ln x = +\infty$

ج- ليكن x من $]0;+\infty[$

$\frac{(\ln x)^2}{x} = \frac{(\ln \sqrt{x}^2)^2}{\sqrt{x}^2}$

$= \left(\frac{\ln \sqrt{x}^2}{\sqrt{x}}\right)^2$

$= \left(\frac{2\ln \sqrt{x}}{\sqrt{x}}\right)^2$

$= 4\left(\frac{\ln \sqrt{x}}{\sqrt{x}}\right)^2$

$\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{(\ln x)^2}{x} = \lim\limits_{x \to +\infty} 4\left(\frac{\ln \sqrt{x}}{\sqrt{x}}\right)^2$

نضع $t = \sqrt{x}$ ، $x \to +\infty \Leftrightarrow t \to +\infty$

إذن $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{(\ln x)^2}{x} = \lim\limits_{t \to +\infty} 4\left(\frac{\ln t}{t}\right)^2$

$= 4 \times 0^2 = 0$

د- لدينا $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$

لنحسب $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x}$

$\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{x + \frac{1}{2} - \ln x + \frac{1}{2}(\ln x)^2}{x}$

$= \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{x + \frac{1}{2}}{x} - \frac{\ln x}{x} + \frac{1}{2}\frac{(\ln x)^2}{x}$

$= 1 - 0 + \frac{1}{2} \times 0$

$= 1$

لأن $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{x + \frac{1}{2}}{x} = \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{x}{x} = 1$

و $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$ و $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{(\ln x)^2}{x} = 0$

لنحسب $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)-x$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)-x = \lim_{x\to+\infty} x+\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{2}\ln x-1\right)\ln x-x$$
$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{2}+\left(\frac{1}{2}\ln x-1\right)\ln x$$
$$= \frac{1}{2}+\left(\frac{1}{2}(+\infty)-1\right)(+\infty)$$
$$= +\infty$$

إذن (C) يقبل فرعا شلجميا

بجوار $+\infty$ اتجاهه المقارب المستقيم (Δ)

الذي معادلته $y=x$

3) أ- لدينا

x	$-\infty$		1		$+\infty$
$x-1$		$-$	0	$+$	

و

x	0		1		$+\infty$
$\ln x$	$\Vert$	$-$	0	$+$	

إذن لكل x من $]0;1]$:

$x-1\leq 0$ و $\ln x\leq 0$

$\Rightarrow x-1+\ln x\leq 0$

و لكل x من $[1;+\infty[$

$x-1\geq 0$ و $\ln x\geq 0$

$\Rightarrow x-1+\ln x\geq 0$

ب- لكل x من $]0;+\infty[$:

$$f'(x) = \left(x+\frac{1}{2}-\ln x+\frac{1}{2}(\ln x)^2\right)'$$
$$= (x)'+\left(\frac{1}{2}\right)'-(\ln x)'+\left(\frac{1}{2}(\ln x)^2\right)'$$
$$= 1+0-\frac{1}{x}+\frac{2}{2}(\ln x)'\ln x$$

$$f'(x) = 1-\frac{1}{x}+\frac{1}{x}\times\ln x$$
$$= 1-\frac{1}{x}+\frac{\ln x}{x}$$
$$= \frac{x-1+\ln x}{x}$$

ج- لدينا $\forall x\in]0;+\infty[: x>0$

إذن إشارة $f'(x)$ هي إشارة $x-1+\ln x$

على $]0;+\infty[$.

و باستثمار نتيجة السؤال السابق

x	0		1		$+\infty$
$f'(x)$	$\Vert$	$-$	0	$+$	
f	$\Vert$ $+\infty$	$\searrow$	$\frac{3}{2}$	$\nearrow$	$+\infty$

$$f(1)=1+\frac{1}{2}-\ln 1+\frac{1}{2}(\ln 1)^2=\frac{3}{2}$$

4) أ- لدينا لكل x من $]0;+\infty[$:

$$f''(x) = \left(\frac{x-1+\ln x}{x}\right)'$$
$$= \frac{(x-1+\ln x)'x-(x-1+\ln x)(x)'}{x^2}$$
$$= \frac{\left(1+\frac{1}{x}\right)x-(x-1+\ln x)}{x^2}$$
$$= \frac{x+1-x+1-\ln x}{x^2}$$
$$= \frac{2-\ln x}{x^2}$$

ب- لدينا $\forall x\in]0;+\infty[: x^2>0$

إذن اشارة $f''(x)$ هي اشارة $2-\ln x$

على $]0;+\infty[$

$2-\ln x\geq 0 \Leftrightarrow 2\geq \ln x$ $\Leftrightarrow e^2\geq x$	$2-\ln x<0 \Leftrightarrow 2<\ln x$ $\Leftrightarrow e^2<x$

$H'(x) = \ln x$
$= h(x)$

إذن H دالة أصلية لـ h على $]0;+\infty[$

ب- لنحسب التكامل $\int_1^e (\ln x)^2 dx$

باستعمال تقنية المكاملة بالأجزاء

نضع:

$$\begin{cases} u'(x) = 1 \\ v(x) = (\ln x)^2 \end{cases} \Leftarrow \begin{cases} u(x) = x \\ v'(x) = 2(\ln x)'\ln x \end{cases}$$

$= 2 \times \frac{1}{x} \ln x$

$= 2\frac{\ln x}{x}$

$$\int_1^e (\ln x)^2 dx = \left[x(\ln x)^2\right]_1^e - \int_1^e x \times 2\frac{\ln x}{x} dx$$

$= e(\ln e)^2 - 1(\ln 1)^2 - 2\int_1^e \ln x \, dx$

$= e - 2\left[x\ln x - x\right]_1^e$

$= e - 2(e\ln e - e - (1\ln 1 - 1))$

$= e - 2(e - e + 1)$

$= e - 2$

ج- مساحة حيز المستوى المحصور بين (C) و (Δ) والمستقيمين اللذين معادلتهما $x=1$ و $x=e$:

$$A = \int_1^e |f(x) - x| \, dx \ (u.a)$$

وبما أن $\forall x \in]0;+\infty[: f(x) - x \geq 0$

فإن $A = \int_1^e (f(x) - x) \, dx \ (u.a)$

لنحسب التكامل $\int_1^e (f(x)-x)dx$

إذن

x	0	e^2	$+\infty$
$f''(x)$	$+$	0	$-$

لدينا $f''(e^2) = 0$ و f'' تتغير إشارتها بجوار e^2

إذن (C) يقبل نقطة انعطاف فصولها e^2

ولدينا $f(e^2) = e^2 + \frac{1}{2} - \ln e^2 + \frac{1}{2}(\ln e^2)$

$= e^2 + \frac{1}{2} - 2 + 2$

$= e^2 + \frac{1}{2}$

النقطة $A(e^2; e^2+\frac{1}{2})$ هي نقطة انعطاف لـ (C).

5) أ- لكل x من $]0;+\infty[$:

$f(x) - x = x + \frac{1}{2} - \ln x + \frac{1}{2}(\ln x)^2 - x$

$= \frac{1}{2}(1 - 2\ln x + (\ln x)^2)$

$= \frac{1}{2}(\ln x - 1)^2$

لدينا $\forall x \in]0;+\infty[: (\ln x - 1)^2 \geq 0$

إذن لكل x من $]0;+\infty[$: $f(x) - x \geq 0$

ومنه (C) يوجد فوق (Δ) على $]0;+\infty[$.

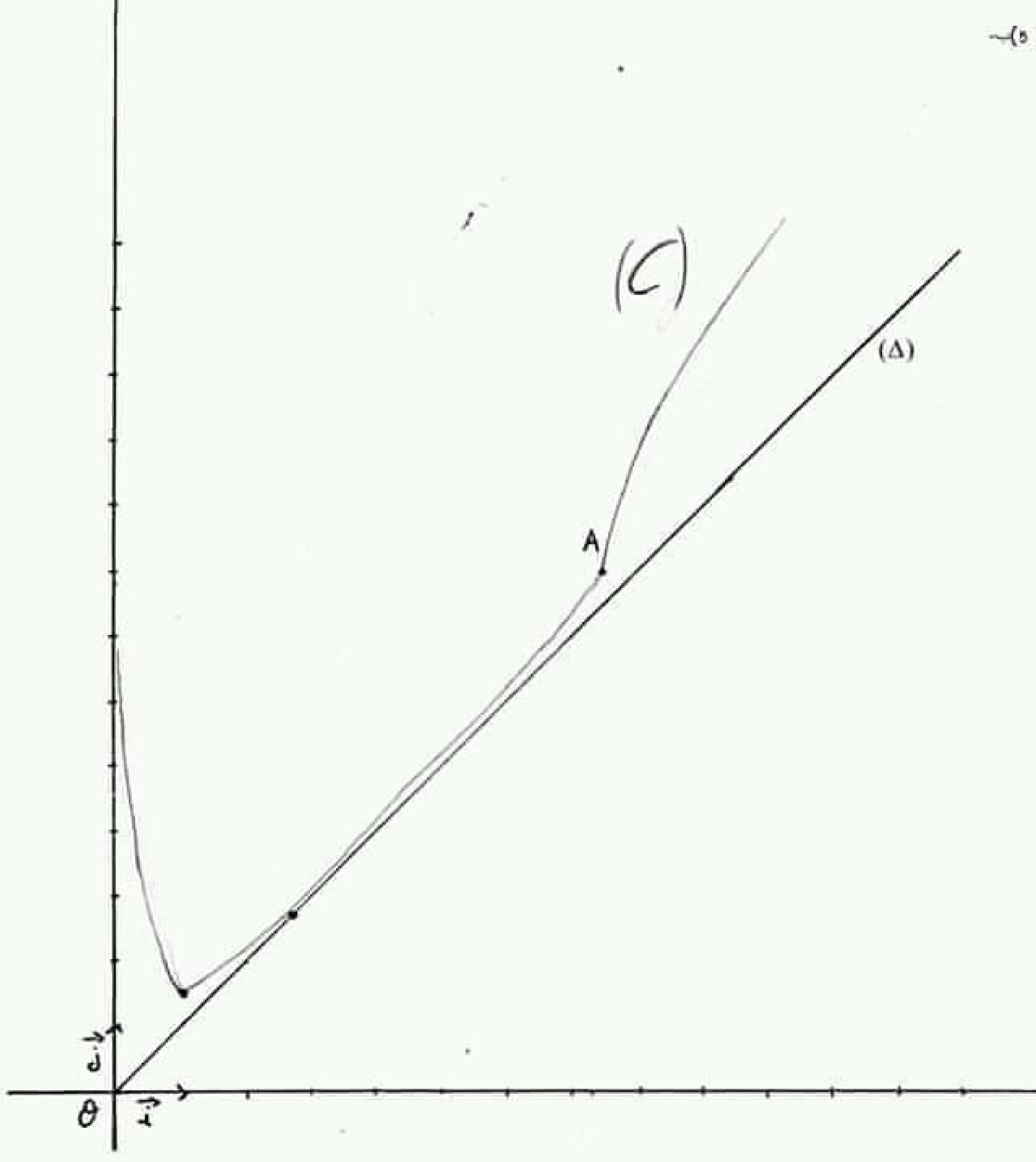
6) أ- لدينا لكل x من $]0;+\infty[$:

$H'(x) = (x\ln x - x)'$

$= (x)'\ln x + x(\ln x)' - (x)'$

$= \ln x + x \times \frac{1}{x} - 1$

$= \ln x + 1 - 1$



$e^2 \simeq 7{,}38$

$e^2 + \frac{1}{2} \simeq 7{,}88$

$f(e) = e + \frac{1}{2} - \ln e + \frac{1}{2}(\ln e)^2$

$= e + \frac{1}{2} - 1 + \frac{1}{2}$

$= e$

$\int_1^e (f(x)-x)\,dx = \int_1^e \frac{1}{2}(\ln x-1)^2\,dx$

$= \frac{1}{2}\int_1^e \left((\ln x)^2 - 2\ln x + 1\right)dx$

$= \frac{1}{2}\left(\int_1^e (\ln x)^2\,dx - 2\int_1^e \ln x\,dx + \int_1^e dx\right)$

$= \frac{1}{2}\int_1^e (\ln x)^2\,dx - \int_1^e \ln x\,dx + \frac{1}{2}\int_1^e dx$

$= \frac{1}{2}(e-2) - [x\ln x - x]_1^e + \frac{1}{2}[x]_1^e$

$= \frac{1}{2}(e-2) - (e\ln e - e - (1\ln 1 - 1)) + \frac{1}{2}(e-1)$

$= \frac{1}{2}(e-2) - (\cancel{e} - \cancel{e} + 1) + \frac{1}{2}(e-1)$

$= \frac{1}{2}(e-2+e-1) - 1$

$= \frac{1}{2}(2e-3) - 1$

$= \frac{1}{2}(2e-3-2)$

$= \frac{1}{2}(2e-5)$

إذن $A = \frac{1}{2}(e-5)\ cm^2$

الجزء الثاني:

1) أ-

من أجل $n=0$: لدينا $u_0 = 1$

إذن $1 \le u_0 \le e$

العبارة صحيحة من أجل $n=0$.

ليكن n من $\mathbb{N}$.

نفترض أن $1 \le u_n \le e$

لنبين أن $1 \le u_{n+1} \le e$

لدينا f دالة تزايدية على $[1;e]$

و $x \mapsto x+\frac{1}{2}$; $x \mapsto -\ln x$; $x \mapsto \frac{1}{2}(\ln x)^2$

دوال متصلة على المجال $[1;e]$

إذن f متصلة على $[1;e]$

لأنها مجموع دوال متصلة

بما أن f دالة متصلة و تزايدية على $[1;e]$

فإن:

$1 \le u_n \le e \Rightarrow f(1) \le f(u_n) \le f(e)$

$\Rightarrow \frac{3}{2} \le u_{n+1} \le e \Rightarrow$

$\Rightarrow 1 \le u_{n+1} \le e$

إذن حسب مبدأ الترجع:

$\forall n \in \mathbb{N}: 1 \le u_n \le e$

ب- الطريقة الأولى:

لدينا لكل n من $\mathbb{N}$:

$u_{n+1} - u_n = f(u_n) - u_n$

ولدينا $\forall x \in [1;e]: f(x) - x \ge 0$

و $\forall n \in \mathbb{N}: 1 \le u_n \le e$

إذن لكل n من $\mathbb{N}$:

$f(u_n) - u_n \ge 0$

أي أن $u_{n+1} - u_n \ge 0$

$u_{n+1} \ge u_n$

وبالتالي (u_n) متتالية تزايدية.

الطريقة الثانية.

(u_n) متتالية تزايدية يعني أن:

$\forall n \in \mathbb{N}: u_{n+1} \ge u_n$

من أجل $n=0$:

لدينا $u_0 = 1$

و $u_1 = f(u_0)$

$= f(1)$

$= \frac{3}{2}$

إذن $u_0 < u_1$ لأن $\frac{3}{2} > 1$

العبارة صحيحة من أجل $n=0$.

ليكن n من $\mathbb{N}$.

نفترض أن $u_{n+1} \geq u_n$

لنبين أن $u_{n+2} \geq u_{n+1}$

لدينا f دالة متصلة وتزايدية على $[1;e]$

و $\forall n \in \mathbb{N} : 1 \leq u_n \leq e$

إذن $u_{n+1} \geq u_n \Rightarrow f(u_{n+1}) \geq f(u_n)$

$\Rightarrow u_{n+2} \geq u_{n+1}$

إذن حسب مبدأ الترجع :

$\forall n \in \mathbb{N} : \quad u_{n+1} \geq u_n$

ومنه (u_n) متتالية تزايدية .

ج) لدينا (u_n) متتالية تزايدية ومكبورة
$(\forall n \in \mathbb{N} : u_n \leq e)$

إذن (u_n) متتالية متقاربة

2) لدينا f دالة متصلة على المجال $[1;e]$

و $f([1;e]) \subset [1;e]$

لأن $f([1;e]) = [f(1); f(e)]$

$= [\frac{3}{2}; e]$

ولدينا $u_0 \in [1;e]$ $(u_0 = 1)$

و (u_n) متتالية متقاربة .

إذن نهاية المتتالية (u_n) هي العدد الحقيقي ℓ حيث ℓ حل للمعادلة

$f(\ell) = \ell$.

$f(\ell) = \ell \iff f(\ell) - \ell = 0$

$\iff \frac{1}{2}(\ln \ell - 1)^2 = 0$

$\iff (\ln \ell - 1)^2 = 0$

$\iff \ln \ell - 1 = 0$

$\iff \ln \ell = 1$

$\iff e^{\ln \ell} = e^1$

$\iff \ell = e$

إذن

$\lim_{n \to +\infty} u_n = e.$