

درس الاتصال

(الثانية علوم تجريبية)

(1) تذكير : النهايات

1. لكل n من $\mathbb{N}^*$ لدينا : $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^n = +\infty$ و $\lim_{x \rightarrow -\infty} x^n = \begin{cases} +\infty & n \text{ زوجي} \\ -\infty & n \text{ فردي} \end{cases}$

2. نهاية دالة حدودية عند $+\infty$ أو $-\infty$ هي نهاية حددها الأعلى درجة

3. نهاية دالة جذرية هي خارج نهاية حددها الأعلى درجة في البسط على حددها الأعلى درجة في المقام

4. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} = \frac{1}{2}$ و $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan(ax)}{x} = a$ و $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(ax)}{x} = a$

5. جداول النهايات:

$\lim f$	l	l	l	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$
$\lim g$	l'	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$
$\lim f + g$	$l + l'$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	شكل غير محدد

$\lim f$	l	$l > 0$	$l > 0$	$l < 0$	$l < 0$	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$\pm\infty$
$\lim g$	l'	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	0
$\lim f \times g$	$l \times l'$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	شكل غير محدد

$\lim f$	$l \neq 0$	0^+	0^-	$+\infty$	$-\infty$
$\lim \frac{1}{f}$	$\frac{1}{l}$	$+\infty$	$-\infty$	0	0

$\lim f$	l	$l > 0$	$l > 0$	$l < 0$	$l < 0$	l	$\pm\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$
$\lim g$	$l' \neq 0$	0^+	0^-	0^+	0^-	$\pm\infty$	$\pm\infty$	0^+	0^-	0^+	0^-
$\lim \frac{f}{g}$	$\frac{l}{l'}$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	0	شكل غير محدد	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$

(2) اتصال دالة في عدد :

تعريف 1:

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a) \Leftrightarrow a \text{ متصلة في } f$$

$$\text{مثال : أدرس اتصال الدالة } f \text{ في العدد } a=1 : \begin{cases} f(x) = \frac{x^2 + 6x - 7}{x - 1} ; x \neq 1 \\ f(1) = 8 \end{cases}$$

لدينا : $f(1) = 8$.

لنحسب $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$

$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 + 6x - 7}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x - 1)(x + 7)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} (x + 7) = 8$$

بما أن $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = f(1)$ فإن f متصلة في العدد 1.

تعريف 2:

$$\begin{aligned} & \checkmark f \text{ متصلة في } a \text{ على اليمين} \Leftrightarrow \lim_{\substack{x \rightarrow a \\ x > a}} f(x) = f(a) \\ & \checkmark f \text{ متصلة في } a \text{ على اليسار} \Leftrightarrow \lim_{\substack{x \rightarrow a \\ x < a}} f(x) = f(a) \\ & \checkmark f \text{ متصلة في } a \Leftrightarrow \lim_{\substack{x \rightarrow a \\ x > a}} f(x) = \lim_{\substack{x \rightarrow a \\ x < a}} f(x) = f(a) \end{aligned}$$

مثال : أدرس اتصال الدالة f في العدد $a=0$:

$$\begin{cases} f(x) = \frac{\sin(2x)}{x} & ; x > 0 \\ f(x) = x^2 - x + 2 & ; x \leq 0 \end{cases}$$

لدينا : $f(0) = (0)^2 - (0) + 2 = 2$.

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} f(x) = \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} \frac{\sin(2x)}{x} = \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} 2 \cdot \frac{\sin(2x)}{2x} = 2$$

لنحسب $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} f(x)$:

لنحسب $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x < 0}} f(x)$:

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x < 0}} f(x) = \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x < 0}} x^2 - x + 2 = 2$$

بما أن : $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} f(x) = \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x < 0}} f(x) = f(0)$

(3) الإتصال على مجال :

خاصيات :

- f متصلة على مجال $]a, b[$ يعني f متصلة في جميع عناصر المجال $]a, b[$
- f متصلة على مجال $[a, b]$ يعني f متصلة في جميع عناصر المجال $]a, b[$ و متصلة على يمين a و متصلة على يسار b
- f متصلة على مجال $]a, b[$ يعني f متصلة في جميع عناصر المجال $]a, b[$ و متصلة على يمين a
- f متصلة على مجال $[a, b]$ يعني f متصلة في جميع عناصر المجال $]a, b[$ و متصلة على يسار b

4) العمليات على الدوال المتصلة

- الدوال الحدودية متصلة على $\mathbb{R}$
- الدوال الجذرية متصلة على كل مجال ضمن مجموعة تعريفها
- الدوال المثلثية $\sin$ و $\cos$ متصلتان على $\mathbb{R}$
- دالة $\tan$ متصلة على كل مجال ضمن مجموعة تعريفها
- إذا كانت f و g متصلتان على مجال I فإن $f + g$ و $f \times g$ متصلتان على I
- إذا كانت f و g متصلتان على مجال I و $g \neq 0$ على I فإن $\frac{f}{g}$ و $\frac{1}{g}$ متصلتان على I .
- إذا كانت f متصلة على مجال I و $f \geq 0$ على I فإن $\sqrt{f}$ متصلة على I .
- إذا كانت f متصلة على مجال I و g متصلة على J بحيث $f(I) \subset J$ فإن $g \circ f$ متصلة على I

أمثلة :

$$1. \quad f : x \mapsto x^3 - \frac{1}{2}x + 1 \text{ متصلة على } \mathbb{R}$$

$$2. \quad f : x \mapsto \frac{2x}{x-2} \text{ متصلة على كل مجال ضمن }]-\infty, 2[\cup]2, +\infty[\text{ لأن } D_f \text{ دالة جذرية}$$

$$3. \quad f : x \mapsto \cos x + x^2 - 7x + 3$$

$$\text{لدينا : } f_1 : x \mapsto \cos x \text{ متصلة على } \mathbb{R} \text{ و } f_2 : x \mapsto x^2 - 7x + 3 \text{ متصلة على } \mathbb{R}$$

$$\text{إذن } f = f_1 + f_2 \text{ متصلة على } \mathbb{R} \text{ كمجموع لدالتين متصلتين على } \mathbb{R}$$

$$4. \quad f : x \mapsto (x-1) \times \sin x$$

$$\text{لدينا : } f_1 : x \mapsto x-1 \text{ متصلة على } \mathbb{R} \text{ و } f_2 : x \mapsto \sin x \text{ متصلة على } \mathbb{R}$$

$$\text{إذن } f = f_1 \times f_2 \text{ متصلة على } \mathbb{R} \text{ كجداء لدالتين متصلتين على } \mathbb{R}$$

$$5. \quad f : x \mapsto \sqrt{x-2}$$

لدينا : $f_1: x \mapsto x - 2$ متصلة على $[2, +\infty[$ و لكل x من $[2, +\infty[$: $f_1(x) \geq 0$

إذن $f = \sqrt{f_1}$ متصلة على $[2, +\infty[$

$$f : x \mapsto \frac{\sqrt{x}}{x^2 + 1} \quad .6$$

لدينا : $f_1: x \mapsto \sqrt{x}$ متصلة على $\mathbb{R}^+$

و لدينا $f_2: x \mapsto x^2 + 1$ متصلة على $\mathbb{R}$ بالخصوص على $\mathbb{R}^+$ و لكل x من $\mathbb{R}^+$: $f_2(x) \neq 0$

إذن $f = \frac{f_1}{f_2}$ متصلة على $\mathbb{R}^+$.

$$f : x \mapsto \sin\left(x^2 + \frac{\pi}{7}\right) \quad .7$$

لدينا $f_1: x \mapsto x^2 + \frac{\pi}{7}$ حدودية متصلة على $\mathbb{R}$ بحيث $f_1(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$ و الدالة $f_2: x \mapsto \sin(x)$ متصلة

على $\mathbb{R}$

إذن $f = f_2 \circ f_1$ متصلة على $\mathbb{R}$

(5) صورة مجال بدالة متصلة و رتبية قطعا

$f(I)$	المجال I	
$[f(a), f(b)]$	$[a, b]$	f تزايدية قطعا
$\left[f(a), \lim_{\substack{x \rightarrow b \\ x < b}} f(x) \right[$	$[a, b[$	
$\left] \lim_{\substack{x \rightarrow a \\ x > a}} f(x), f(b) \right]$	$]a, b]$	
$\left] \lim_{\substack{x \rightarrow a \\ x > a}} f(x), \lim_{\substack{x \rightarrow b \\ x < b}} f(x) \right[$	$]a, b[$	
$\left] \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x), f(a) \right]$	$] -\infty, a]$	
$\left] \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x), \lim_{\substack{x \rightarrow a \\ x < a}} f(x) \right[$	$] -\infty, a[$	
$\left[f(b), \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) \right[$	$[b, +\infty[$	
$\left] \lim_{\substack{x \rightarrow b \\ x > b}} f(x), \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) \right[$	$]b, +\infty[$	
$\left] \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x), \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) \right[$	$] -\infty, +\infty[$	
$[f(b), f(a)]$	$[a, b]$	f تناقصية قطعا
$\left] \lim_{\substack{x \rightarrow b \\ x < b}} f(x), f(a) \right]$	$[a, b[$	
$\left[f(b), \lim_{\substack{x \rightarrow a \\ x > a}} f(x) \right[$	$]a, b]$	
$\left] \lim_{\substack{x \rightarrow b \\ x < b}} f(x), \lim_{\substack{x \rightarrow a \\ x > a}} f(x) \right[$	$]a, b[$	
$\left[f(a), \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) \right[$	$] -\infty, a]$	
$\left] \lim_{\substack{x \rightarrow a \\ x < a}} f(x), \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) \right[$	$] -\infty, a[$	
$\left] \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x), f(b) \right]$	$[b, +\infty[$	
$\left] \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x), \lim_{\substack{x \rightarrow b \\ x > b}} f(x) \right[$	$]b, +\infty[$	
$\left] \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x), \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) \right[$	$] -\infty, +\infty[$	

مثال 1:

نعتبر الدالة العددية f المعرفة بما يلي : $f(x) = \frac{2x+1}{x-1}$

لدينا : $D_f = \{x \in \mathbb{R} / x-1 \neq 0\} = \{x \in \mathbb{R} / x \neq 1\} = \mathbb{R} - \{1\} =]-\infty, 1[\cup]1, +\infty[$

لنحدد صور المجالات التالية : $[2; 3]$ و $]1; +\infty[$ و $]1; 4]$ و $]0; 1[$

الدالة f قابلة للاشتقاق على كل مجال ضمن D_f (لأنها دالة جذرية)

ليكن $x \in D_f$:

$$f'(x) = \left(\frac{2x+1}{x-1} \right)' = \frac{(2x+1)'(x-1) - (2x+1)(x-1)'}{(x-1)^2} = \frac{2 \cdot (x-1) - (2x+1) \cdot 1}{(x-1)^2} = \frac{2x-2-2x-1}{(x-1)^2} = \frac{-3}{(x-1)^2}$$

إذن : $f'(x) = \frac{-3}{(x-1)^2}$ ($\forall x \in D_f$) . من الواضح أن $f'(x) < 0$ ($\forall x \in D_f$) و منه الدالة f تناقصية قطعاً

على D_f

$$f([2; 3]) = [f(3); f(2)] = \left[\frac{7}{2}; 5 \right]$$

$$f(]1; +\infty[) = \left[\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x); \lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x > 1}} f(x) \right] =]2; +\infty[$$

$$f(]-\infty; 1[) = \left[\lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x < 1}} f(x); \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) \right] =]-\infty; 2[$$

$$f(]1; 4]) = \left[f(4); \lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x > 1}} f(x) \right] = [3; +\infty[$$

$$f([0; 1[) = \left[\lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x < 1}} f(x); f(0) \right] =]-\infty; -1]$$

مثال 2:

نعتبر الدالة العددية f المعرفة بما يلي : $f(x) = x^3 + 7x - 2$
الدالة f قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ لأنها دالة حدودية
ليكن $x \in \mathbb{R}$: $f'(x) = (x^3 + 7x - 2)' = 3x^2 + 7$ إذن : $f'(x) > 0$ ($\forall x \in \mathbb{R}$)
و منه الدالة f تزايدية قطعاً على $\mathbb{R}$

لنحدد صور المجالات التالية : $] -\infty; +\infty[$ و $[1; 3]$
 $f(]-\infty; +\infty[) =]\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x); \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)[=] -\infty; +\infty[$
 $f([1; 3]) = [f(1); f(3)] = [6; 46]$

6) مبرهنة القيم الوسيطة :

إذا كانت f متصلة على $[a; b]$ فإنه لكل λ محصور بين $f(a)$ و $f(b)$ يوجد على الأقل c من $[a; b]$ بحيث
 $f(c) = \lambda$:

نتائج :

■ مبرهنة القيم الوسيطة (وجودية الحل على $[a; b]$)

إذا كانت f متصلة على $[a; b]$ و $f(a) \times f(b) < 0$ فإن المعادلة $f(x) = 0$ تقبل حلاً على الأقل في المجال $]a; b[$

مثال :

لنبين أن المعادلة : $x^4 + x - 3 = 0$ تقبل حلاً على الأقل في $]0; 2[$
✓ نعتبر الدالة f المعرفة ب : $f(x) = x^4 + x - 3$
• الدالة f متصلة على $\mathbb{R}$ (لأنها دالة حدودية) بالخصوص على المجال $[0; 2]$
• لدينا $f(0) = -2$ و $f(2) = 15$ إذن $f(0) \times f(2) < 0$

و منه حسب مبرهنة القيم الوسيطة فإن المعادلة : $f(x) = 0$ تقبل حلا على الأقل في $]0;2[$

▪ مبرهنة القيم الوسيطة بالوحدانية (وجودية ووحدانية الحل على $[a,b]$)

إذا كانت f متصلة و رتيبة قطعاً على $[a,b]$ و $f(a) \times f(b) < 0$ فإن المعادلة $f(x) = 0$ تقبل حلاً وحيداً في المجال $]a,b[$

مثال :

لنبين أن المعادلة $x^3 + 2x = 1$ تقبل حلاً وحيداً في المجال $[0,1]$ ($x^3 + 2x = 1 \Leftrightarrow x^3 + 2x - 1 = 0$)

✓ نعتبر الدالة f المعرفة ب : $f(x) = x^3 + 2x - 1$

• الدالة f متصلة على $\mathbb{R}$ (لأنها دالة حدودية) بالخصوص على المجال $[0,1]$

• الدالة f قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ (لأنها دالة حدودية) بالخصوص على المجال $[0,1]$

ليكن $x \in [0;1]$: $f'(x) = (x^3 + 2x - 1)' = 3x^2 + 2$

إذن : $f'(x) > 0$ ($\forall x \in \mathbb{R}$) و منه f تزايدية قطعاً على $[0,1]$

• $f(0) = -1$ و $f(1) = 2$ إذن $\underline{f(0) \times f(1) < 0}$

و منه حسب مبرهنة القيم الوسيطة بالوحدانية فإن المعادلة : $f(x) = 0$ تقبل حلاً وحيداً في $[0;1]$

■ مبرهنة (وجودية ووحداية الحل على مجال I)

إذا كانت f متصلة ورتيبة قطعاً على I و $0 \in f(I)$ فإن المعادلة $f(x) = 0$ تقبل حلاً وحيداً في المجال I

مثال :

لنبين أن المعادلة $2x^3 + 5x - 4 = 0$ تقبل حلاً وحيداً α في $\mathbb{R}$ ثم تحقق أن $0 < \alpha < 1$

✓ نعتبر الدالة f المعرفة ب : $f(x) = 2x^3 + 5x - 4$

• الدالة f متصلة على $\mathbb{R}$ (لأنها دالة حدودية)

• الدالة f قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ (لأنها دالة حدودية)

ليكن $x \in \mathbb{R} : f'(x) = (2x^3 + 5x - 4)' = 3x^2 + 5$

إذن : $f'(x) > 0$ ($\forall x \in \mathbb{R}$) و منه f تزايدية قطعاً على $\mathbb{R}$

• لنحسب $f(\mathbb{R}) : f(\mathbb{R}) = f(]-\infty; +\infty[) = \left] \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x); \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) \right[=]-\infty; +\infty[= \mathbb{R}$

إذن : $0 \in f(\mathbb{R})$

و بالتالي المعادلة $f(x) = 0$ تقبل حلاً وحيداً α في $\mathbb{R}$

✓ لنتحقق أن $0 < \alpha < 1$:

• الدالة f متصلة $[0, 1]$

• $f(0) = -4$ و $f(1) = 3$ إذن $f(0) \times f(1) < 0$

إذن حسب مبرهنة القيم الوسيطة فإن : $0 < \alpha < 1$

(7) الدالة العكسية لدالة متصلة ورتيبة قطعا :

خاصية :

إذا كانت f دالة متصلة ورتيبة قطعا على مجال I فإن f تقبل دالة عكسية f^{-1} معرفة من مجال $J = f(I)$ نحو I

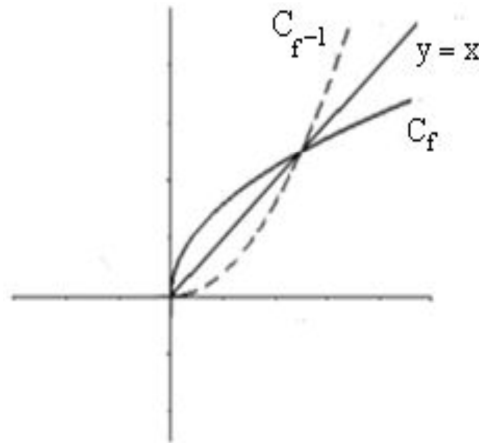
نتائج:

$$(1) \begin{cases} y = f^{-1}(x) \\ x \in J \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} f(y) = x \\ y \in I \end{cases}$$
$$(2) \begin{cases} f^{-1} \circ f(x) = x & ; x \in I \\ f \circ f^{-1}(x) = x & ; x \in J \end{cases}$$

خاصيات:

لتكن f دالة و f^{-1} دالتها العكسية على المجال J لدينا :

- f^{-1} متصلة على المجال J
- f و f^{-1} لهما نفس الرتبة
- منحنى f^{-1} هو مماثل لمنحنى f بالنسبة للمستقيم ذي المعادلة $y = x$ (المنصف الأول للمعلم)



مثال :

نعتبر الدالة f المعرفة بما يلي : $f(x) = \frac{3x+5}{x+1}$

• لنبين أن g قصور f على المجال $[0;1]$ تقبل دالة عكسية g^{-1} معرفة على مجال J يتم تحديده :

✓ g قصور دالة جذرية معرفة على المجال $[0;1]$ إذن g متصلة على $[0;1]$

✓ g قصور دالة جذرية معرفة على المجال $[0;1]$ إذن g قابلة للاشتقاق على $[0;1]$

$$\text{ليكن } x \in [0;1] : g'(x) = \left(\frac{3x+5}{x+1} \right)' = \frac{-2}{(x+1)^2}$$

إذن : $g'(x) < 0$ ($\forall x \in [0;1]$) و منه g تناقصية قطعاً على $[0;1]$

و بالتالي g تقبل دالة عكسية g^{-1} معرفة على مجال J نحو $[0;1]$

$$\text{بحيث : } J = g([0;1]) = [g(1); g(0)] = [4;5]$$

• لنحدد : $g^{-1}(x)$ ($\forall x \in J$)

✓ ليكن $x \in J = [4;5]$

$$y = g^{-1}(x) \Leftrightarrow x = g(y) \quad (y \in I = [0;1])$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{3y+5}{y+1}$$

$$\Leftrightarrow x.(y+1) = 3y+5$$

$$\Leftrightarrow xy + x = 3y + 5$$

$$\Leftrightarrow xy - 3y = 5 - x$$

$$\Leftrightarrow y.(x-3) = 5-x$$

$$\Leftrightarrow y = \frac{5-x}{x-3}$$

$$\text{إذن : } g^{-1}(x) = \frac{5-x}{x-3} \quad (\forall x \in J = [4;5])$$

(8) الجذر من الرتبة n ($n \in \mathbb{N}^*$)

أ. تعريف :

ليكن n من $\mathbb{N}^*$

الدالة العكسية للدالة $x \mapsto x^n$ على المجال $[0, +\infty[$ تسمى دالة الجذر من الرتبة n و نرمز لها ب : $x \mapsto \sqrt[n]{x}$
الدالة $x \mapsto \sqrt[n]{x}$ متصلة و تزايدية قطعاً على $[0, +\infty[$

ب. أمثلة :

$$(n=1) \quad \sqrt[n]{x} = x$$

$$(n=2) \quad \sqrt[n]{x} = \sqrt{x} \quad (\text{الجذر المربع})$$

$$(n=3) \quad \sqrt[n]{x} = \sqrt[3]{x} \quad (\text{الجذر المكعب})$$

ج. خصائص :

ليكن x و y عددين حقيقيين موجبان. لدينا :

$$\sqrt[n]{x^m} = \sqrt[n]{x}^m \quad \sqrt[n]{\sqrt[n]{x}} = \sqrt[n]{x} \quad \sqrt[n]{x^n} = x \quad (\sqrt[n]{x})^n = x$$

$$(y \neq 0) \quad \sqrt[n]{\frac{x}{y}} = \frac{\sqrt[n]{x}}{\sqrt[n]{y}} \quad \sqrt[n]{x \cdot y} = \sqrt[n]{x} \cdot \sqrt[n]{y}$$

أمثلة :

أ. لنبس ما يلي :

$$a = \sqrt[3]{27} \quad b = \sqrt[4]{16} \quad c = \sqrt{\sqrt[3]{729}}$$

$$a = \sqrt[3]{27} = \sqrt[3]{3^3} = 3$$

$$b = \sqrt[4]{16} = \sqrt[4]{2^4} = 2$$

$$c = \sqrt{\sqrt[3]{729}} = \sqrt{\sqrt[3]{3^6}} = \sqrt{3^2} = 3$$

ب. قارن العددين : $x = \sqrt[3]{4}$ و $y = \sqrt[4]{5}$

لدينا : $x = \sqrt[3]{4} = \sqrt[3 \times 4]{4^4} = \sqrt[12]{256}$ و $y = \sqrt[4]{5} = \sqrt[4 \times 3]{5^3} = \sqrt[12]{125}$

بما أن $125 < 256$ فإن $\sqrt[12]{125} < \sqrt[12]{256}$ و منه $y < x$

ج. اجعل مقام العدد التالي جذريا : $\frac{1}{\sqrt[3]{4}-1}$

$$\frac{1}{\sqrt[3]{4}-1} = \frac{1}{(\sqrt[3]{4})^3 - 1^3} = \frac{(\sqrt[3]{4})^2 + \sqrt[3]{4} + 1^2}{(\sqrt[3]{4})^3 - 1^3} = \frac{(\sqrt[3]{4})^2 + \sqrt[3]{4} + 1}{4-1} = \frac{(\sqrt[3]{4})^2 + \sqrt[3]{4} + 1}{3}$$

د. خاصية:

لتكن f دالة و $n \in \mathbb{N}^*$

➤ إذا كان $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = +\infty$ فإن : $\lim_{x \rightarrow x_0} \sqrt[n]{f(x)} = +\infty$

➤ إذا كان $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = l$ و $l \geq 0$ فإن : $\lim_{x \rightarrow x_0} \sqrt[n]{f(x)} = \sqrt[n]{l}$

➤ إذا كانت f متصلة و موجبة على مجال I فإن $\sqrt[n]{f}$ متصلة على I

أمثلة :

1. لنحسب : $\lim_{x \rightarrow -\infty} \sqrt[3]{x^2 + x - 1}$

لدينا : $\lim_{x \rightarrow -\infty} x^2 + x - 1 = \lim_{x \rightarrow -\infty} x^2 = +\infty$ إذن : $\lim_{x \rightarrow -\infty} \sqrt[3]{x^2 + x - 1} = +\infty$

2. لنحسب : $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt[3]{\frac{8x}{x+1}}$

لدينا $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{8x}{x+1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{8x}{x} = 8$ إذن : $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt[3]{\frac{8x}{x+1}} = \sqrt[3]{8} = \sqrt[3]{2^3} = 2$

3. لندرس اتصال الدالة : $h : x \mapsto \sqrt[3]{x^2}$

لدينا : $x \mapsto x^2$ متصلة على $\mathbb{R}$ و $f(x) \geq 0$ ($\forall x \in \mathbb{R}$)

إذن الدالة $h = \sqrt[3]{f}$ متصلة على $\mathbb{R}$

(9) القوى الجذرية لعدد حقيقي:

أ. تعريف :

ليكن n و m من $\mathbb{N}^*$ و $x > 0$ لدينا :

$$\sqrt[n]{x^m} = x^{\frac{m}{n}} \quad \text{و} \quad \sqrt[n]{x} = x^{\frac{1}{n}}$$

أمثلة :

$$5^{\frac{3}{4}} = \sqrt[4]{5^3} \quad \bullet$$

$$4^{-\frac{5}{2}} = \frac{1}{4^{\frac{5}{2}}} = \frac{1}{\sqrt[2]{4^5}} = \frac{1}{\sqrt[2]{2^{10}}} = \frac{1}{2^{10}} \quad \bullet$$

ب. خاصية :

لكل عددين حقيقيين موجبين قطعا x و y و لكل r و r' من $\mathbb{Q}^*$:

$$\begin{aligned} (x^r)^{r'} &= x^{r \cdot r'} \quad \bullet & x^r \cdot y^r &= (x \cdot y)^r \quad \bullet & x^{r+r'} &= x^r \cdot x^{r'} \quad \bullet \\ \frac{x^r}{x^{r'}} &= x^{r-r'} \quad \bullet & \frac{x^r}{y^r} &= \left(\frac{x}{y}\right)^r \quad \bullet & \frac{1}{x^r} &= x^{-r} \quad \bullet \end{aligned}$$

مثال :

$$A = \frac{\sqrt[3]{\sqrt{8}} \times \sqrt[4]{\sqrt{32}}}{\sqrt{2} \times \sqrt[12]{64}} \quad \text{لنبسط العدد}$$

$$A = \frac{\sqrt[3]{\sqrt{8}} \times \sqrt[4]{\sqrt{32}}}{\sqrt{2} \times \sqrt[12]{64}} = \frac{\left(8^{\frac{1}{2}}\right)^{\frac{1}{3}} \times \left(32^{\frac{1}{4}}\right)^{\frac{1}{2}}}{2^{\frac{1}{2}} \times 64^{\frac{1}{12}}} = \frac{8^{\frac{1}{6}} \times 32^{\frac{1}{8}}}{2^{\frac{1}{2}} \times 64^{\frac{1}{12}}} = \frac{(2^3)^{\frac{1}{6}} \times (2^5)^{\frac{1}{8}}}{2^{\frac{1}{2}} \times (2^6)^{\frac{1}{12}}} = \frac{2^{\frac{3}{6}} \times 2^{\frac{5}{8}}}{2^{\frac{1}{2}} \times 2^{\frac{6}{12}}} = \frac{2^{\frac{1}{2}} \times 2^{\frac{5}{8}}}{2^{\frac{1}{2}} \times 2^{\frac{1}{2}}} = 2^{\frac{5}{8} - \frac{1}{2}} = 2^{\frac{1}{8}} = \sqrt[8]{2}$$

つづく