

# اتصال دالة عددية

## 1) اتصال دالة في نقطة :

### أ. تعريف :

لتكن  $f$  دالة عددية معرفة على مجال مفتوح مركزه  $x_0$

نقول أن  $f$  متصلة في  $x_0$  إذا كان  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$

$$f \text{ متصلة في } x_0 \text{ تعني } (\forall \varepsilon > 0)(\exists \alpha \in \mathbb{R})(\forall x \in D_f) : 0 < |x - x_0| < \alpha \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$$

$$\lim_{\substack{x \rightarrow a \\ x > a}} f(x) = f(a) \Leftrightarrow f \text{ متصلة في } a \text{ على اليمين} \quad \checkmark$$

$$\lim_{\substack{x \rightarrow a \\ x < a}} f(x) = f(a) \Leftrightarrow f \text{ متصلة في } a \text{ على اليسار} \quad \checkmark$$

$$\lim_{\substack{x \rightarrow a \\ x > a}} f(x) = \lim_{\substack{x \rightarrow a \\ x < a}} f(x) = f(a) \Leftrightarrow f \text{ متصلة في } a \quad \checkmark$$

### ب. التمديد بالاتصال في نقطة :

لتكن  $f$  دالة عددية بحيث  $x_0 \notin D_f$  و  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = l$  ( $l \in \mathbb{R}$ )

$$\text{الدالة } \tilde{f} \text{ بحيث : } \begin{cases} \tilde{f}(x) = f(x) & x \neq x_0 \\ \tilde{f}(x_0) = l \end{cases} \text{ متصلة في } x_0$$

الدالة  $\tilde{f}$  تسمى التمديد بالاتصال للدالة  $f$  في  $x_0$

## 2) الاتصال على مجال :

### أ. تعريف :

- $f$  متصلة على مجال  $]a, b[$  يعني  $f$  متصلة في جميع عناصر المجال  $]a, b[$
- $f$  متصلة على مجال  $[a, b[$  يعني  $f$  متصلة في جميع عناصر المجال  $[a, b[$  و متصلة على يسار  $b$

- $f$  متصلة على مجال  $]a,b[$  يعني  $f$  متصلة في جميع عناصر المجال  $]a,b[$  ومتصلة على يمين  $a$
- $f$  متصلة على مجال  $]a,b[$  يعني  $f$  متصلة في جميع عناصر المجال  $]a,b[$  ومتصلة على يسار  $b$

### ب. العمليات على الدوال المتصلة :

- ❖ الدوال الحدودية متصلة على  $\mathbb{R}$
- ❖ الدوال الجذرية متصلة على كل مجال ضمن مجموعة تعريفها
- ❖ الدوال المثلثية  $\sin$  و  $\cos$  متصلتان على  $\mathbb{R}$
- ❖ دالة  $\tan$  متصلة على كل مجال ضمن مجموعة تعريفها
- ❖ دالة الجزء الصحيح متصلة على كل مجال  $[n, n+1[$  ( $n \in \mathbb{Z}$ )
- ❖ إذا كانت  $f$  و  $g$  متصلتان على مجال  $I$  فإن  $f + g$  و  $f \times g$  متصلتان على  $I$
- ❖ إذا كانت  $f$  و  $g$  متصلتان على مجال  $I$  و  $g \neq 0$  على  $I$  فإن  $\frac{f}{g}$  و  $\frac{1}{g}$  متصلتان على  $I$ .
- ❖ إذا كانت  $f$  متصلة على مجال  $I$  و  $f \geq 0$  على  $I$  فإن  $\sqrt{f}$  متصلة على  $I$ .

### خاصية :

1. إذا كانت  $f$  متصلة على مجال  $I$  و  $g$  متصلة على  $J$  بحيث  $f(I) \subset J$  فإن  $g \circ f$  متصلة على  $I$
2. إذا كانت  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = l$  و  $g$  متصلة في  $l$  فإن  $\lim_{x \rightarrow x_0} g \circ f(x) = g(l)$

### 3) صورة مجال بدالة متصلة:

### خاصية :

- صورة قطعة بدالة متصلة هي قطعة
- صورة مجال بدالة متصلة هو مجال

**4) صورة مجال بدالة متصلة ورتيبة قطعا :**

$f(I)$	المجال $I$	
$[f(a), f(b)]$	$[a, b]$	f تزايدية قطعا
$\left[ f(a), \lim_{\substack{x \rightarrow b \\ x < b}} f(x) \right[$	$[a, b[$	
$\left] \lim_{\substack{x \rightarrow a \\ x > a}} f(x), f(b) \right]$	$]a, b]$	
$\left[ \lim_{\substack{x \rightarrow a \\ x > a}} f(x), \lim_{\substack{x \rightarrow b \\ x < b}} f(x) \right[$	$]a, b[$	
$\left] \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x), f(a) \right]$	$] -\infty, a]$	
$\left] \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x), \lim_{\substack{x \rightarrow a \\ x < a}} f(x) \right[$	$] -\infty, a[$	
$\left[ f(b), \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) \right[$	$[b, +\infty[$	
$\left] \lim_{\substack{x \rightarrow b \\ x > b}} f(x), \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) \right]$	$]b, +\infty]$	
$\left] \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x), \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) \right[$	$] -\infty, +\infty[$	
$[f(b), f(a)]$	$[a, b]$	
$\left] \lim_{\substack{x \rightarrow b \\ x < b}} f(x), f(a) \right]$	$]a, b]$	
$\left[ f(b), \lim_{\substack{x \rightarrow a \\ x > a}} f(x) \right[$	$[a, b[$	
$\left] \lim_{\substack{x \rightarrow b \\ x < b}} f(x), \lim_{\substack{x \rightarrow a \\ x > a}} f(x) \right]$	$]a, b[$	
$\left[ f(a), \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) \right[$	$] -\infty, a]$	
$\left] \lim_{\substack{x \rightarrow a \\ x < a}} f(x), \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) \right]$	$] -\infty, a[$	
$\left] \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x), f(b) \right]$	$[b, +\infty]$	
$\left] \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x), \lim_{\substack{x \rightarrow b \\ x > b}} f(x) \right]$	$]b, +\infty]$	
$\left] \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x), \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) \right[$	$] -\infty, +\infty[$	

### (5) ميرهنة القيم الوسيطة :

إذا كانت  $f$  متصلة على  $[a,b]$  فإنه لكل  $\lambda$  محصور بين  $f(a)$  و  $f(b)$  يوجد على الأقل  $c$  من  $[a,b]$  بحيث :  $f(c) = \lambda$

نتائج :

▪ ميرهنة القيم الوسيطة ( وجودية الحل على  $[a,b]$  )

إذا كانت  $f$  متصلة على  $[a,b]$  و  $f(a) \times f(b) < 0$  فإن المعادلة  $f(x) = 0$  تقبل حلا على الأقل في المجال  $]a,b[$

▪ ميرهنة القيم الوسيطة بالوحدانية ( وجودية ووحدانية الحل على  $[a,b]$  )

إذا كانت  $f$  متصلة ورتيبة قطعا على  $[a,b]$  و  $f(a) \times f(b) < 0$  فإن المعادلة  $f(x) = 0$  تقبل حلا وحيدا في المجال  $]a,b[$

▪ ميرهنة ( وجودية ووحدانية الحل على مجال  $I$  )

إذا كانت  $f$  متصلة ورتيبة قطعا على  $I$  و  $0 \in f(I)$  فإن المعادلة  $f(x) = 0$  تقبل حلا وحيدا في المجال  $I$

### (6) الدالة العكسية :

خاصية :

إذا كانت  $f$  دالة متصلة ورتيبة قطعا على مجال  $I$  فإن  $f$  تقبل دالة عكسية  $f^{-1}$  معرفة من مجال  $J = f(I)$  نحو  $I$  أو نقول أن  $f$  تقابل من  $I$  نحو  $J$  وتقابله العكسي  $f^{-1}$

نتائج :

$$(1) \begin{cases} y = f^{-1}(x) \\ x \in J \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} f(y) = x \\ y \in I \end{cases}$$

$$(2) \begin{cases} f^{-1} \circ f(x) = x & ; x \in I \\ f \circ f^{-1}(x) = x & ; x \in J \end{cases}$$

خاصيات:

لتكن  $f$  دالة و  $f^{-1}$  دالتها العكسية على المجال  $J$  لدينا :  
✚  $f^{-1}$  متصلة على المجال  $J$   
✚  $f$  و  $f^{-1}$  لهما نفس الرتبة  
✚ منحنى  $f^{-1}$  هو مماثل لمنحنى  $f$  بالنسبة للمستقيم ذي المعادلة  $y = x$  (المنصف الأول للمعلم)

