



4	مدة الإنجاز	الرياضيات	المادة
9	المعامل	شعبة العلوم الرياضية : " أ " و " ب "	الشعبة أو المسلك

- مدة إنجاز الموضوع هي أربع ساعات.
- يتكون الموضوع من أربعة تمارين مستقلة فيما بينها.
- يمكن إنجاز التمارين حسب الترتيب الذي يرغب فيه المترشح.

- التمرين 1 يتعلق بالبنيات الجبرية.....(3.5 ن)
- التمرين 2 يتعلق بالأعداد العقدية.....(3.5 ن)
- التمرين 3 يتعلق بحساب الاحتمالات.....(3 ن)
- التمرين 4 يتعلق بالتحليل.....(10 ن)

لا يسمح باستعمال الآلة الحاسبة كيفما كان نوعها

لا يسمح باستعمال اللون الأحمر بورقة التحرير

التمرين 1: (3.5 نقط)

ندكر أن $(M_2(i), +, \cdot)$ حلقة واحدة صفرها المصفوفة المنعدمة $O = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ و وحدتها

المصفوفة $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ و أن $(M_2(i), +, \cdot)$ فضاء متجهي حقيقي بعده 4.

لكل $(x, y) \in \mathbb{C}^2$ نضع $M(x, y) = \begin{pmatrix} x & y \\ 0 & x \end{pmatrix}$ و نعتبر المجموعة $E = \{M(x, y) / (x, y) \in \mathbb{C}^2\}$

1- بين أن E زمرة جزئية للزمرة $(M_2(i), +)$ 0.5

2- (أ) بين أن E فضاء متجهي جزئي للفضاء المتجهي $(M_2(i), +, \cdot)$ 0.5

(ب) بين أن بعد الفضاء المتجهي الحقيقي $(E, +, \cdot)$ هو 2. 0.25

3- (أ) بين أن E مستقر بالنسبة للقانون " " 0.25

(ب) بين أن $(E, +, \cdot)$ حلقة تبادلية. 0.5

4- نعرف في $M_2(i)$ قانون التركيب الداخلي T بما يلي: لكل $M(x, y)$ و $M(x', y')$ من $M_2(i)$

$$M(x, y)TM(x', y') = M(x, y) \cdot M(x', y') - M(y, 0) \cdot M(y', 0)$$

ليكن z التطبيق المعرف من \mathbb{C}^* نحو E بما يلي: لكل عدد عقدي مكتوب على شكله

$$j(z) = M(x, y), \quad z = x + iy$$

(أ) بين أن E مستقر بالنسبة للقانون "T" 0.25

(ب) بين أن z تشاكل من (\mathbb{C}^*, \cdot) نحو (E, T) 0.25

(ج) نضع $E^* = E - \{O\}$. بين أن (E^*, T) زمرة تبادلية. 0.25

5- (أ) بين أن القانون T توزيعي بالنسبة للقانون « + » في E . 0.5

(ب) بين أن $(E, +, T)$ جسم تبادلي. 0.25

التمرين 2: (3.5 نقط)

1- لكل عدد عقدي $\{i\}$ - نضع $h(z) = \frac{z^2 - 2iz - 2}{z - i}$

(أ) تحقق من أن: $h(z) = z^2 - 2iz - 2 = 0$ 0.5

(ب) حل في \mathbb{C} المعادلة: $z^2 - 2iz - 2 = 0$ (E) 0.5

2- المستوى العقدي منسوب إلى معلم متعامد ممنظم مباشر (O, e_1, e_2)

نرمز ب a و b لحلي المعادلة (E) بحيث: $\text{Re}(a) = 1$

و لكل $\{i, a, b\}$ - نعتبر النقط $M(z)$ و $M'(h(z))$ و $A(a)$ و $B(b)$ ذات الألقاق z

و $h(z)$ و a و b بالتوالي.

	$\frac{h(z)-a}{h(z)-b} = -\frac{z-a}{z-b}$	0.75
	(ب) استنتج أن: $[2p] \quad (M'B, M'A)^\circ p + (MB, MA)$	0.75
	3-أ) بين أنه إذا كانت النقط M و A و B مستقيمية فإن النقط M و A و B و M' مستقيمية.	0.5
	ب) بين أنه إذا كانت النقط M و A و B غير مستقيمية فإن النقط M و A و B و M' متداورة.	0.5

التمرين 3: (3 نقط)

نرمي قطعة نقدية غير مغشوشة في الهواء 10 مرات متتالية.
ليكن X المتغير العشوائي الذي يربط كل نتيجة ممكنة بتردد ظهور الوجه "Pile"
(أي عدد مرات الحصول على "Pile" مقسوم على 10)

- 1-أ) حدد القيم الممكنة للمتغير X . 1
ب) احسب احتمال الحدث: $\left[X = \frac{1}{2} \right]$. 1
2- ما هو احتمال الحدث: X أكبر من أو يساوي $\frac{9}{10}$ ؟ 1

التمرين 4: (10 نقط)

لتكن f الدالة العددية المعرفة على المجال $[0, +\infty[$ بما يلي:

$$f(0) = 0 \quad \text{و} \quad f(x) = \sqrt{x}(\ln x)^2 \quad (x > 0)$$

ليكن (C) منحنىها في معلم متعامد ممنظم (O, i, j) .

- 1-أ) بين أن f متصلة على اليمين في 0 (يمكن ملاحظة أن $f(x) = \frac{1}{4} \ln^2 x^4$) 0.5

- ب) احسب $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ و $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x}$ ثم أول مبيانيا النتيجة المحصل عليها. 0.75

- 2-أ) ادرس اشتقاق f على اليمين في 0 ثم أول مبيانيا النتيجة المحصل عليها. 0.75

- ب) بين أن f قابلة للاشتقاق على $]0, +\infty[$ ثم احسب $f'(x)$ لكل $x > 0$. 0.75

- ج) ادرس تغيرات الدالة f على $]0, +\infty[$. استنتج أن: $0 \leq \sqrt{x}(\ln x)^2 \leq \left(\frac{4}{e}\right)^2$ $(\forall x \in]0, 1])$ 1

- د) أنشئ المنحنى (C) (تأخذ: $\|i\| = 2cm$). 0.5

$$3- \text{ لكل } x \geq 0 \text{ نضع: } F(x) = \int_x^1 f(t) dt$$

- أ) بين أن الدالة F قابلة للاشتقاق على المجال $]0, +\infty[$. 0.5

- ب) احسب $F'(x)$ لكل $x \geq 0$. استنتج رتبة F على $]0, +\infty[$. 1

0.75 (أ-4) باستعمال طريقة المكاملة بالأجزاء احسب $\int_x^1 \sqrt{t} \ln t \cdot dt$ لكل $x > 0$.

0.75 (ب) بين أن لكل $x > 0$: $F(x) = -\frac{2}{3}x\sqrt{x}(\ln x)^2 + \frac{8}{9}x\sqrt{x} \ln x - \frac{16}{27}x\sqrt{x} + \frac{16}{27}$

1 (ج) استنتج مساحة الحيز المستوي المحصور بين المنحنى (C) و المستقيمات المعرفة

بالمعادلات: $x=0$ و $x=1$ و $y=0$

5- لكل عدد صحيح طبيعي غير منعدم n نضع: $u_n = \int_{\frac{1}{n}}^1 f(x) dx$

1 (أ) بين أن المتتالية $(u_n)_{n \geq 1}$ محدودة و رتبية قطعاً.

0.75 (ب) بين أن المتتالية $(u_n)_{n \geq 1}$ متقاربة ثم احسب $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$.

انتهى