الامتحان الوطني الموحد للبكالوريا

الدورة العادية 2018

-الموضوع-

NS24

المملكة المغربية
وزارة التربية الوطنية
والتكوين المهني
والتعليم العالي والبحث العلمي

المركز الوطني للتقويم والامتحانات
والتوجيه

المادة	الرياضيات	مدة الإنجاز	4
الشعبة أو المسلك	شعبة العلوم الرياضية : "أ " و " ب "	المعامل	9

- مدة إنجاز الموضوع هي أربع ساعات.
- يتكون الموضوع من خمسة تمارين مستقلة فيما بينها.
- يمكن إنجاز التمارين حسب الترتيب الذي يرغب فيه المترشح.

- التمرين 1 يتعلق بالبنيات الجبرية.....(3.5 ن)
- التمرين 2 يتعلق بالحسابيات.....(3 ن)
- التمرين 3 يتعلق بالأعداد العقدية.....(3.5 ن)
- التمرين 4 يتعلق بالتحليل.....(7.5 ن)
- التمرين 5 يتعلق بالتحليل.....(2.5 ن)

لا يسمح باستعمال الآلة الحاسبة كيفما كان نوعها

لا يسمح باستعمال اللون الأحمر بورقة التحرير

التمرين 1: (3.5 نقطة)

نذكر أن $(\mathbb{C},+,\times)$ جسم تبادلي وأن $(M_2(\mathbb{C}),+,\times)$ حلقة واحدية، صفرها المصفوفة المنعدمة $O=\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}$

و وحدتها المصفوفة $I=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$ و أن $(M_2(\mathbb{C}),+,.)$ فضاء متجهي حقيقي .

لكل زوج (x,y) من $\mathbb{R}^2$ نضع : $M(x,y)=\begin{pmatrix}x&-2y\\y&x+2y\end{pmatrix}$

و نعتبر المجموعة $E=\{M(x,y)/(x,y)\in\mathbb{R}^2\}$

0.25 1- بين أن E زمرة جزئية للزمرة $(M_2(\mathbb{C}),+)$

0.25 2- أ) بين أن E فضاء متجهي جزئي للفضاء المتجهي $(M_2(\mathbb{C}),+,.)$

0.5 ب) نضع $J=M(0,1)$. بين أن (I,J) أساس للفضاء المتجهي الحقيقي $(E,+,.)$

0.5 3- أ) بين أن E جزء مستقر من $(M_2(\mathbb{C}),\times)$

0.5 ب) بين أن $(E,+,\times)$ حلقة تبادلية.

4- ليكن φ التطبيق من $\mathbb{C}^*$ نحو $M_2(\mathbb{C})$ المعرف بما يلي:

$$\forall (x,y)\in\mathbb{R}^2-\{(0,0)\}\ ;\ \varphi(x+iy)=M(x+y,-y)=\begin{pmatrix}x+y&2y\\-y&x-y\end{pmatrix}$$

0.5 أ) بين أن φ تشاكل من $(\mathbb{C}^*,\times)$ نحو $(M_2(\mathbb{C}),\times)$

0.5 ب) نضع $E^*=E-\{O\}$. بين أن: $\varphi(\mathbb{C}^*)=E^*$

0.25 ج) استنتج أن $(E^*,\times)$ زمرة تبادلية.

0.25 5- بين أن $(E,+,\times)$ جسم تبادلي.

التمرين 2: (3 نقط)

ليكن p عددا أوليا بحيث: $p=3+4k$ $(k\in\mathbb{N}^*)$

0.5 1- بين أن لكل عدد صحيح نسبي x ، إذا كان $x^2\equiv 1\ [p]$ فإن $x^{p-5}\equiv 1\ [p]$

2- ليكن x عددا صحيحا نسبيا يحقق: $x^{p-5}\equiv 1\ [p]$

0.5 أ) بين أن x و p أوليان فيما بينهما.

0.5 ب) بين أن: $x^{p-1}\equiv 1\ [p]$

0.5 ج) تحقق أن: $2+(k-1)(p-1)=k(p-5)$

0.5 د) استنتج أن: $x^2\equiv 1\ [p]$

0.5 3- حل في $\mathbb{Z}$ المعادلة : $x^{62}\equiv 1\ [67]$

التمرين 3: (3.5 نقطة)

ليكن m عددا عقديا.

I- نعتبر في مجموعة الأعداد العقدية $\mathbb{C}$ المعادلة (E_m) ذات المجهول z :

$$z^2+(im+2)z+im+2-m=0$$

0,25 1- أ) تحقق أن $\Delta=(im-2i)^2$ هو مميز المعادلة (E_m)

0,5 ب) إعط حسب قيم العدد m مجموعة حلول المعادلة (E_m)

0,5 2- من أجل $m=i\sqrt{2}$ ، اكتب حلي المعادلة (E_m) على الشكل الأسي.

II- المستوى العقدي منسوب إلى معلم متعامد ممنظم مباشر $(O;\vec{u},\vec{v})$

نعتبر النقط A و Ω و M و M' ذات الألحاق على التوالي $a=-1-i$ و $\omega=i$ و m و $m'=-im-1+i$

1- ليكن R الدوران الذي زاويته $-\frac{\pi}{2}$ و يحول M إلى M'.

0.25 أ) تحقق أن Ω هو مركز الدوران R

0.5 ب) حدد b لحق النقطة B التي تحقق : $A=R(B)$

0,5 2- أ) تحقق أن: $m'-a=\frac{\omega-a}{\omega-b}(m-b)$

0,5 ب) استنتج أن النقط A و M و M' تكون مستقيمية إذا و فقط إذا كانت النقط A و B و Ω و M متداورة.

0,5 ج) بين أن مجموعة النقط M بحيث تكون النقط A و M و M' مستقيمية هي دائرة يجب تحديد مركزها و شعاعها.

التمرين 4:(7.5 نقطة)

الجزء I :

0.5 1- أ) بين أن: $\int_0^x \frac{t}{1+t}dt=x-\ln(1+x)$; $(\forall x\in]0,+\infty[)$

ب) باستعمال تغيير المتغير : $u=t^2$ بين أن:

0.5 $\int_0^x \frac{t}{1+t}dt=\frac{1}{2}\int_0^{x^2}\frac{1}{1+\sqrt{u}}du$; $(\forall x\in]0,+\infty[)$

0.5 ج) استنتج أن: $\frac{1}{2(1+x)}\le\frac{x-\ln(1+x)}{x^2}\le\frac{1}{2}$; $(\forall x\in]0,+\infty[)$

0.25 2- حدد : $\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{x-\ln(1+x)}{x^2}$

الجزء II :

نعتبر الدالة f المعرفة على $[0,+\infty[$ بما يلي: $\begin{cases} f(x)=\left(\dfrac{x+1}{x}\right)\ln(1+x) \;\; ; \;\; x\neq 0 \\ f(0)=1 \end{cases}$

و ليكن (C) منحناها في معلم متعامد ممنظم $(O;\vec{i},\vec{j})$

0.25 1- أ) بين أن f متصلة على اليمين في 0

0.5 ب) بين أن f قابلة للاشتقاق على اليمين في 0 (يمكن استعمال نتيجة السؤال I-2).

0.75 ج) احسب $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{x}$ ثم أول مبيانيا النتيجة المحصل عليها.

0.5 2- أ) بين أن f قابلة للاشتقاق على $[0,+\infty[$ ثم تحقق أن:

$$(\forall x\in]0,+\infty[) \;\; ; \;\; f'(x)=\frac{x-\ln(1+x)}{x^2}$$

0.25 ب) استنتج أن f تزايدية قطعا على $[0,+\infty[$

0.25 ج) تحقق أن: $f([0,+\infty[)=[1,+\infty[$

0.5 3- مثل مبيانيا المنحنى (C) (يتم إنشاء نصف المماس على اليمين في النقطة ذات الأفصول 0).

الجزء III :

1- نعتبر الدالة العددية g المعرفة على $[0,+\infty[$ بما يلي: $g(x)=f(x)-x$

0.5 أ) بين أن: $(\forall x\in]0,+\infty[) \;\; ; \;\; 0\leq f'(x)\leq\dfrac{1}{2}$

0.5 ب) استنتج أن الدالة g تناقصية قطعا على $[0,+\infty[$ ثم بين أن: $g(]0,+\infty[)=]-\infty,1[$

0.25 ج) بين أن المعادلة $f(x)=x$ تقبل حلا وحيدا α على المجال $]0,+\infty[$

2- ليكن a عددا حقيقيا من المجال $]0,+\infty[$

نعتبر المتتالية $(u_n)_{n\geq 0}$ المعرفة بما يلي: $u_0=a$ و $u_{n+1}=f(u_n)$; $(\forall n\in\mathbb{N})$

0.25 أ) بين أن: $(\forall n\in\mathbb{N}) \;\; ; \;\; u_n>0$

0.5 ب) بين أن: $(\forall n\in\mathbb{N}) \;\; ; \;\; |u_{n+1}-\alpha|\leq\dfrac{1}{2}|u_n-\alpha|$

0.5 ج) بين بالترجع أن: $(\forall n\in\mathbb{N}) \;\; ; \;\; |u_n-\alpha|\leq\left(\dfrac{1}{2}\right)^n|a-\alpha|$

0.25 د) استنتج أن المتتالية $(u_n)_{n\geq 0}$ تؤول إلى α

التمرين 5: (2.5 نقطة)

نعتبر الدالة F المعرفة على $\mathbb{R}$ بما يلي: $F(x)=\int_0^x e^{t^2}dt$

0.5 1- بين أن F متصلة و تزايدية قطعا على $\mathbb{R}$

0.5 2- أ) بين أن: $F(x)\geq x$; $(\forall x\in[0,+\infty[)$ ثم استنتج $\lim\limits_{x\to+\infty}F(x)$

0.5 ب) بين أن F فردية ثم استنتج $\lim\limits_{x\to-\infty}F(x)$

0.5 ج) بين أن F تقابل من $\mathbb{R}$ نحو $\mathbb{R}$

0.5 د) بين أن دالة التقابل العكسي G للدالة F قابلة للاشتقاق في 0 ثم احسب $G'(0)$

انتهى

المملكة المغربية

وزارة التربية الوطنية والتكوين المهني والتعليم العالي و البحث العلمي

الأكاديمية الجهوية للتربية والتكوين

جهة الدار البيضاء - سطات

الشعبة أو المسلك : علوم رياضية أ المستوى 2Bac

2149

امتحان نيل شهادة البكالوريا

مادة : الرياضيات

532511

التقدير المفسر للنقطة

النقطة النهائية	على 20
20,00	
بالحروف	
عشرون نقطة	

خاص بكتابة الإمتحان

اسم المصحح(ة) و توقيعه(ها)

البنيات الجبرية :

1 - لدينا $M(1,0) = I \in E$ إذن E مجموعة غير فارغة

و $E \subset M_2(\mathbb{R})$ لأنها مجموعة المصفوفات المربعة من الرتبة 2.

- ليكن x و y و a و b عناصر من $\mathbb{R}$

$$M(x,y) - M(a,b) = \begin{pmatrix} x & -2y \\ y & x+2y \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} a & -2b \\ b & a+2b \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} x-a & -2y+2b \\ y-b & x-a+2y-2b \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} x-a & -2(y-b) \\ y-b & a-x+2(y-b) \end{pmatrix}$$

0,25

$$= M(x-a, y-b) \in E \quad \checkmark$$

لأن $x-a$ و $y-b$ عنصران من $\mathbb{R}$

إذن E زمرة جزئية للزمرة $(M_2(\mathbb{R}), +)$ ✓

2 - أ لدينا E جزء غير فارغ من $M_2(\mathbb{R})$

ليكن a و b و x و y و α من $\mathbb{R}$

$$M(a,b) + M(x,y) = \begin{pmatrix} a & -2b \\ b & a+2b \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x & -2y \\ y & x+2y \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} a+x & -2b-2y \\ b+y & x+a+2b+2y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+x & -2(b+y) \\ b+y & x+a+2(b+y) \end{pmatrix}$$

$$M(a,b) + M(x,y) = M(a+x, b+y) \in E \quad \checkmark$$

لأن $a+x$ و $b+y$ عنصران من $\mathbb{R}$

تنبيه : يمنع ... أي علامة يمكنها أن تبين أصله

$$\alpha \cdot M(a,b) = \alpha \cdot \begin{pmatrix} a & -2b \\ b & a+2b \end{pmatrix}$$ ✓

$$= \begin{pmatrix} \alpha a & -2\alpha b \\ \alpha b & \alpha(a+2b) \end{pmatrix}$$ ✓

0,5

$$\alpha \cdot M(a,b) = \begin{pmatrix} \alpha a & -2\alpha b \\ \alpha b & \alpha a + 2\alpha b \end{pmatrix} = M(\alpha a, \alpha b) \in E$$ ✓

لأن αa و αb عنصران من $\mathbb{R}$

إذن E فضاء متجهي جزئي للفضاء المتجهي $(M_2(\mathbb{R}),+,\cdot)$

ب- لنبين أن (I,J) أسرة مولدة للفضاء المتجهي $(E,+,\cdot)$

$I = M(1,0) \in E$ و $J = M(0,1) \in E$

ليكن x و y من $\mathbb{R}$:

$$M(x,y) = \begin{pmatrix} x & -2y \\ y & x+2y \end{pmatrix}$$ ✓

$$= \begin{pmatrix} x & 0 \\ 0 & x \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & -2y \\ y & 2y \end{pmatrix}$$ ✓

$$= x \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + y \cdot \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$ ✓

$$= x \cdot M(1,0) + y \cdot M(0,1)$$ ✓

$$M(x,y) = x \cdot I + y \cdot J$$

0,5

إذن (I,J) أسرة مولدة للفضاء المتجهي $(E,+,\cdot)$

لنبين أن (I,J) أسرة حرة

ليكن x و y عنصران من $\mathbb{R}$

لدينا:

$$x \cdot I + y \cdot J = M(0,0)$$

أي:

$$\begin{pmatrix} x & 0 \\ 0 & x \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & -2y \\ y & 2y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$ ✓

المملكة المغربية

وزارة التربية الوطنية والتكوين المهني والتعليم العالي والبحث العلمي

الأكاديمية الجهوية للتربية والتكوين

جهة الدار البيضاء - سطات

الشعبة أو المسلك : SMA المستوى .....

امتحان نيل شهادة البكالوريا

مادة : MAT

التقدير المفسر للنقطة

النقطة النهائية	على 20
.....	
.....	بالحروف
.....	

خاص بكتابة الإمتحان

اسم المصحح(ة) و توقيعه(ها) .....

تتمة البنيات الجبرية :

4 - أ - لدينا : $\varphi((x+iy)(a+ib)) = M(xa-yb+bx+ya ; -bx-ya)$

$\varphi(a+ib) \times \varphi(x+iy) = M(a+b,-b) \times M(x+y,-y)$ ②

ولدينا مما سبق أن :

$M(x,y) \times M(a,b) = M(xa-2yb ; xb+ya+2yb)$

أي :

$M(a+b,-b) \times M(x+y,-y) = M((x+y)(a+b)-2by ; -y(a+b)-b(x+y)+2yb)$

$= M(xa+ya+xb+yb-2by ; -ya-yb-bx-by+2yb)$

$= M(xa-by+bx+ya ; -ya-bx)$ ①

0,5

إذن من ① و ② نستنتج أن :

$\varphi(a+ib) \times \varphi(x+iy) = M(xa-yb+bx+ya ; -bx-ya)$

إذن :

$\varphi((x+iy)(a+ib)) = \varphi(a+ib) \times \varphi(x+iy)$

وبما أن φ تشاكل من $(\mathbb{C}^*, \times)$ نحو $(M_2(\mathbb{R}), \times)$

ب - لنبين أن : $\varphi(\mathbb{C}^*) \subset E^*$

ليكن $x+iy$ من $\mathbb{C}^*$

أي $(x,y) \neq (0,0)$ ولدينا : $\varphi(x+iy) = M(x+y,-y)$

ومنه $(x+y,-y) \neq (0,0)$ أي $M(x+y,-y) \neq M(0,0)$

إذن $M(x+y,-y) \in E - \{0\}$

أي $M(x+y,-y) \in E^*$ ومنه $\varphi(x+iy) \in E^*$

إذن $\varphi(\mathbb{C}^*) \subset E^*$

لنبين أن $E^* \subset \varphi(\mathbb{C}^*)$

ليكن $M(a,b)$ من E^*

أي $(a,b) \neq (0,0)$

تنبيه : يمنع

ومنه $(a+b,-b) \neq (0,0)$

إذن $(a+b) - ib \in \mathbb{C}^*$

إذن $\varphi(a+b-ib) \in \mathbb{C}^*$

أي $M(a+b-b, +b) \in \varphi(\mathbb{C}^*)$ (0,5)

أي $\Omega(a,b) \in \varphi(\mathbb{C}^*)$

إذن $E^* \subset \varphi(\mathbb{C}^*)$

إذن $\varphi(\mathbb{C}^*) = E^*$ ✓

ج - بما أن φ تشاكل من $(\mathbb{C}^*, \times)$ نحو $(\Omega_4(\mathbb{R}), \times)$

و $(\mathbb{C}^*, \times)$ زمرة تبادلية

فإن $(\varphi(\mathbb{C}^*), \times)$ زمرة تبادلية (0,25)

و لدينا $E^* = \varphi(\mathbb{C}^*)$ ✓

إذن $(E^*, \times)$ زمرة تبادلية

ك - لدينا : ✓ $(E, +)$ زمرة تبادلية

و الضرب توزيعي بالنسبة للجمع في E حسب 3 - ..

و $(E^*, \times)$ زمرة تبادلية $\Omega(0,0) = 0$ هو العنصر ✓ (0,25)

المحايد في $(E, +)$

إذن $(E, +, \times)$ جسم تبادلي .

الحساب ببيات :

1 - ليكن n عدد صحيح نسبي و p عدد أولي

لدينا $n^2 \equiv 1 [p]$

نضع $n \wedge p = d$

d يساوي p أو 1 لأن p أولي

نفترض أن $d = p$

أي p / n

ومنه p / n^2

وهذا تناقض لأن $n^2 \equiv 1 [p]$

ومنه p و n أوليين فيما بينهما

و بما أن p أولي موجب : $p = 3+4k$ و $k > 0$

فإن حسب مبرهنة فيرما الصغرى : $n^{p-1} \equiv 1 [p]$

$(p > 5)$; $n^{p-5} \times n^4 \equiv 1 [p]$ ومنه

المملكة المغربية

وزارة التربية الوطنية والتكوين المهني والتعليم العالي والبحث العلمي

الأكاديمية الجهوية للتربية والتكوين

جهة الدار البيضاء - سطات

الشعبة أو المسلك : SnA المستوى

امتحان نيل شهادة البكالوريا

مادة : MAT

التقدير المفسر للنقطة

النقطة النهائية	على 20
	بالحروف

خاص بكتابة الإمتحان

اسم المصحح(ة) و توقيعه(ها)

التمرين 4 : التحليل :

1) أ- ليكن x من $]0,+\infty[$

$$\int_0^x \frac{t}{1+t}\,dt = \int_0^x \left(\frac{t+1}{1+t} - \frac{1}{1+t}\right)dt$$

$$= \int_0^x \left(1 - \frac{1}{1+t}\right)dt = \left[t - \ln(1+t)\right]_0^x$$

$$= x - \ln(1+x) - \ln(1)$$ إذن

$$\int_0^x \frac{t}{1+t}\,dt = x - \ln(1+x)$$ (0,5)

ب - ليكن x من $]0,+\infty[$ ، لدينا $u = t^2$

لدينا : $t = x \Longrightarrow u = x^2$

و $t = 0 \Longrightarrow u = 0$

و لدينا $u = t^2 \Longrightarrow t = \sqrt{u}$ ✓

أي $du = 2t\,dt$

ومنه $dt = \frac{du}{2t}$ ✓ (0,5)

إذن $$\int_0^x \frac{t}{1+t}\,dt = \int_0^{x^2} \frac{\sqrt{u}}{1+\sqrt{u}} \times \frac{1}{2\sqrt{u}} \times du$$

إذن $$\int_0^x \frac{t}{1+t}\,dt = \frac{1}{2}\int_0^{x^2} \frac{1}{1+\sqrt{u}}\,du$$ ✓

ج - لدينا $$\int_0^x \frac{t}{1+t}\,dt = \frac{1}{2}\int_0^{x^2} \frac{1}{1+\sqrt{u}}\,du$$

و $$\int_0^x \frac{t}{1+t}\,dt = x - \ln(1+x)$$

أي $$x - \ln(1+x) = \frac{1}{2}\int_0^{x^2} \frac{1}{1+\sqrt{u}}\,du$$

ولدينا $0 \leq u \leq x^2$ أي $0 \leq \sqrt{u} \leq x$

ومنه $1 \leq \sqrt{u}+1 \leq x+1$

أي $\frac{1}{x+1} \leq \frac{1}{\sqrt{u}+1} \leq 1$

بما أن الدالة $u \longmapsto \frac{1}{\sqrt{u}+1}$ متصلة على $[0,+\infty[$

فبالمرور الى التكامل نحصل على: $(x>0)$

$$\frac{1}{x+1}\int_0^{x^2} du \leq \int_0^{x^2} \frac{1}{\sqrt{u}+1} du \leq \int_0^{x^2} du$$

ومنه $\frac{1}{x+1} x^2 \leq x - \ln(x+1) \leq x^2$

أي $\frac{x^2}{x+1} \leq x - \ln(x+1) \leq x^2$ (0,5)

وبما أن $x^2 > 0$

فإن $\frac{1}{x+1} \leq \frac{x-\ln(x+1)}{x^2} \leq 1$

2- لدينا: $(\forall x \in]0,+\infty[) \quad \frac{1}{x+1} \leq \frac{x-\ln(1+x)}{x^2} \leq 1$

و $\lim_{x \to 0^+} \frac{1}{x+1} = 1$

و $\lim_{x \to 0^+} 1 = 1$ (0,25)

إذن $\lim_{x \to 0^+} \frac{x-\ln(1+x)}{x^2} = 1$

الجزء II:

1) أ- الإحتمال على اليمين في 0:

$$\lim_{x \to 0^+} f(x) = \lim_{x \to 0^+} \left(\frac{x+1}{x}\right) \ln(1+x)$$

$$= \lim_{x \to 0^+} (x+1) \times \frac{\ln(1+x)}{x}$$

$$= 1 \times 1 = 1 = f(0)$$

(0,25)

المملكة المغربية

وزارة التربية الوطنية والتكوين المهني والتعليم العالي والبحث العلمي

الأكاديمية الجهوية للتربية والتكوين جهة الدار البيضاء - سطات

الشعبة أو المسلك : SNA المستوى .....

امتحان نيل شهادة البكالوريا

مادة : MAT

التقدير المفسر للنقطة .....

النقطة النهائية	على 20
.....	
.....	بالحروف

خاص بكتابة الإمتحان

اسم المصحح(ة) و توقيعه(ها) .....

II تتمة تمرين 4 التحليل، الجزء

ب - (تتمة) لدينا $(\forall x \in]0,+\infty[)\ f'(x) > 0$ (البرهنة في الورقة السابقة) 0,25

ومنه f تزايدية قطعا على $[0,+\infty[$

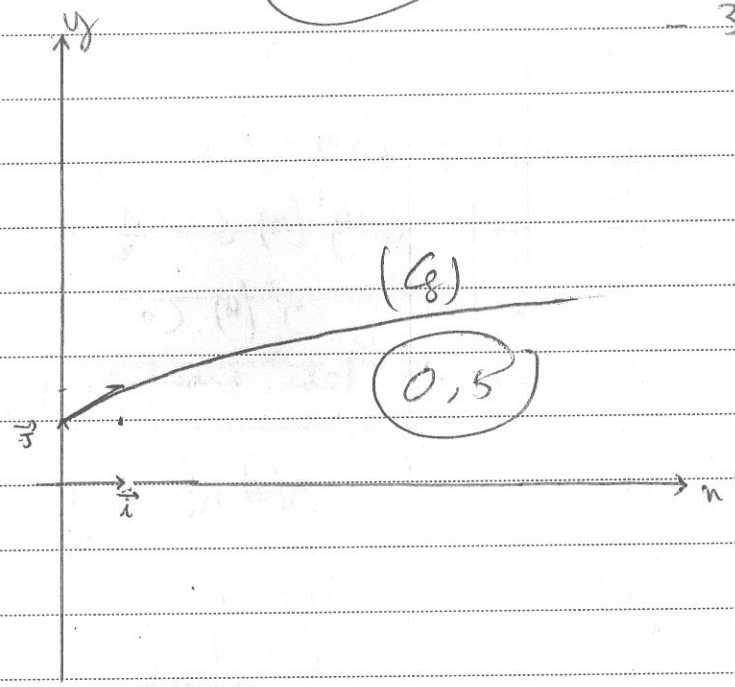
ج - نعلم أن f تزايدية قطعا،

$$f([0,+\infty[) = [f(0), \lim_{x \to +\infty} f(x)[$$

ونعلم أن $f(0) = 1$ و $\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$

إذن $f([0,+\infty[) = [1,+\infty[$ 0,25

3 -



الجزء III

1 - أ- لدينا ← I - ج ، ليكن x من $]0,+\infty[$

$$\frac{1}{2(1+x)} \leq \frac{x - \ln(1+x)}{x^2} \leq \frac{1}{2}$$

و $f'(x) = \frac{x - \ln(1+x)}{x^2}$

و $x > 0$ أي $\frac{1}{2(1+x)} > 0$ (0,5)

ومنه ✓ $0 < f'(x) \leq \frac{1}{2}$

إذن ✓ $\forall x \in]0,+\infty[\; ; \; 0 < f'(x) \leq \frac{1}{2}$

ب - ليكن x من $]0,+\infty[$

لدينا $g(x) = f(x) - x$ وبما أن f قابلة للاشتقاق على $]0,+\infty[$ و الدالة $x \mapsto -x$ قابلة للاشتقاق على $]0,+\infty[$ فإن g قابلة للاشتقاق على $]0,+\infty[$

و لدينا $g'(x) = f'(x) - 1$

و لدينا $0 \leq f'(x) \leq \frac{1}{2}$ (0,25)

ومنه $-1 \leq f'(x) - 1 \leq -\frac{1}{2}$

أي $-1 \leq g'(x) \leq -\frac{1}{2} < 0$

ومنه $g'(x) < 0$

إذن ✓ g تناقصية قطعا على $]0,+\infty[$،

ومنه $g(]0,+\infty[) =]\lim_{x \to +\infty} g(x), \lim_{x \to 0^+} g(x)[$

لدينا $\lim_{x \to +\infty} g(x) = \lim_{x \to +\infty} f(x) - x$ (0,25)

$\lim_{x \to +\infty} g(x) = \lim_{x \to +\infty} \left(\frac{f(x)}{x} - 1\right) \times x = -\infty$ ✓

لأن $\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = 0$ ← II - 1 - ج

و $\lim_{x \to +\infty} -1 \times x = -\infty$

المملكة المغربية

وزارة التربية الوطنية والتكوين المهني والتعليم العالي والبحث العلمي

الأكاديمية الجهوية للتربية والتكوين

جهة الدار البيضاء - سطات

الشعبة أو المسلك : SNA المستوى .....

امتحان نيل شهادة البكالوريا

مادة : MAT

التقدير المفسر للنقطة

النقطة النهائية	على 20
.....	
.....	بالحروف
.....	

خاص بكتابة الإمتحان

اسم المصحح(ة) و توقيعه(ها) .....

تتمة التمرين 4 - التحليل : III - 2 - ج - تتمة البرهان

لدينا : $\frac{1}{2}|u_n - \alpha| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} |a - \alpha|$ (1)

و $|u_{n+1} - \alpha| \leq \frac{1}{2}|u_n - \alpha|$ (2)

من (1) و (2) نستنتج أن :

$|u_{n+1} - \alpha| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} |a - \alpha|$ ✓ 0,25

إذن حسب مبدأ الترجع :

$(\forall n \in \mathbb{N}) ; |u_n - \alpha| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n |a - \alpha|$

ج - لدينا : $(\forall n \in \mathbb{N}) ; |u_n - \alpha| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n |a - \alpha|$

و $0 < \frac{1}{2} < 1$ ✓

لأن $\lim_{n \to +\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n = 0$ ✓

إذن $\lim_{n \to +\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n |a - \alpha| = 0$ 0,25

لأن $|a - \alpha|$ عدد حقيقي موجب

إذن حسب مصادرة التقارب :

$$\begin{cases} |u_n - \alpha| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n |a - \alpha| \\ \lim_{n \to +\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n |a - \alpha| = 0 \end{cases} \Rightarrow \lim_{n \to +\infty} u_n = \alpha$$

إذن المتتالية $(u_n)_{n \geq 0}$ تؤول إلى α

✓

التمرين 3 : $F(x) = \int_0^x e^{t^2} dt$, $D_F = \mathbb{R}$

1- الدالة $t \mapsto e^{t^2}$ متصلة على $\mathbb{R}$ لأن : $t \xrightarrow{u} t^2$ متصلة على $\mathbb{R}$ و $u \mapsto e^u$ متصلة على $\mathbb{R}$

و $u(\mathbb{R}) = \mathbb{R}^+ \subset \mathbb{R}$

ومنه فإن g تقبل دالة أصلية φ على $\mathbb{R}$

$$F(x) = \varphi(x) - \varphi(0)$$

و $\varphi(0)$ ثابتة ✓ (0,25)

و الدالة φ قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ (لأنها من أصلية g)

ومنه F قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$

إذن F متصلة على $\mathbb{R}$

$$F'(x) = \varphi'(x)$$

و

$$= g(x) \quad (\text{لأن } \varphi \text{ من أصلية } g)$$

$$F'(x) = e^{x^2} > 0$$ ✓ (0,25)

✓ لأن الدالة $x \mapsto e^x$ موجبة تماما كما يكن x من $\mathbb{R}$

إذن F تزايدية قطعا على $\mathbb{R}$

2- أ- ليكن x من $]0, +\infty[$

لدينا $0 \leq t \leq x$ لأن $x > 0$

ومنه $0 \leq t^2 \leq x^2$

أي $e^{t^2} \leq e^{x^2}$ ≤ 1 الدالة $x \mapsto e^x$ تزايدية ومتصلة على $\mathbb{R}$

ومنه: $\int_0^x dt \leq \int_0^x e^{t^2} dt \leq \int_0^x e^{x^2} dt$ (بالعودة الى التكامل نجعل $x > 0$)

$$\boxed{x \leq F(x) \leq e^{x^2} \int_0^x dt}$$ ✓ (0,5)

إذن $\forall x \in]0, +\infty[\quad x \leq F(x)$

و بما أن $\lim_{x \to +\infty} x = +\infty$

فإن $\lim_{x \to +\infty} F(x) = +\infty$ ✓

ب- ليكن x من $\mathbb{R}$

نعلم أن $(\forall x \in \mathbb{R}) : -x \in \mathbb{R}$

إذن D_F متماثلة بالنسبة للصفر.

$$F(-x) = \int_0^{-x} e^{t^2} dt$$

نضع $u = -t$ ✓

المملكة المغربية

وزارة التربية الوطنية والتكوين المهني والتعليم العالي والبحث العلمي

الأكاديمية الجهوية للتربية والتكوين جهة الدار البيضاء - سطات

الشعبة أو المسلك : SNA المستوى

امتحان نيل شهادة البكالوريا

مادة : MAT

التقدير المفسر للنقطة

النقطة النهائية	على 20
	بالحروف

خاص بكتابة الإمتحان

اسم المصحح(ة) و توقيعه(ها)

الأعداد العقدية (تتمة) :

I - 2 $(E_m) = \{-1-i ; -i m ; -1+i\}$

إذا كان $m = i\sqrt{2}$

فإن حلي المعادلة هما $z_1 = -1-i$ و $z_2 = -i\sqrt{2}-1+i$

* $z_1 = -1-i = -\sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i\right) = -\sqrt{2}\, e^{i\frac{\pi}{4}}$

$= \sqrt{2}\, e^{i(\frac{\pi}{4}+\pi)}$

$z_1 = \sqrt{2}\, e^{i\frac{5\pi}{4}}$

(0,5)

* $z_2 = -i\sqrt{2} - 1 + i$

$= -\sqrt{2}\, i - \sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}i\right) = -\sqrt{2}\, e^{i\frac{\pi}{2}} - \sqrt{2}\, e^{-i\frac{\pi}{4}}$

$= -\sqrt{2}\left(e^{i\frac{\pi}{2}} + e^{-i\frac{\pi}{4}}\right)$

$= \sqrt{2}\, e^{i\pi} \times e^{i\frac{\pi}{8}}\left(e^{+i\frac{3\pi}{8}} + e^{-i\frac{3\pi}{8}}\right)$

$= \sqrt{2} \times 2\cos\left(\frac{3\pi}{8}\right) \times e^{i\pi} \times e^{i\frac{\pi}{8}}$ $\left(\cos\frac{\pi}{8} > 0\right)$

$z_2 = 2\sqrt{2}\cos\left(\frac{3\pi}{8}\right) e^{i\frac{9\pi}{8}}$

II - 1 - 1 الصيغة العقدية للدوران R هو $z' = -e^{i\frac{\pi}{2}}(z-c)+c$

حيث c لحق مركزه

ونعلم أن مركز الدوران يكون نقطة صامدة بالدوران

لنتحقق من أن $\Omega(w)$ نقطة صامدة بالدوران R:

$-iw - 1 + i = -i \times i - 1 + i$

$= 1 - 1 + i = i = w$ ✓

(0,25)

إذن w نقطة صامدة بالدوران R إذن فهو مركز الدوران.

$$a = e^{-i\frac{\pi}{2}}(b-w)+w$$

$$\Leftrightarrow a-w = -i(b-w)$$

$$\Leftrightarrow b-w = -\frac{1}{i}(a-w)$$

$$\Leftrightarrow b = w + i(a-w)$$

$$\Leftrightarrow b = i + i(-1-i-i)$$

$$\Leftrightarrow b = i - i + 2$$

$$\Rightarrow b = 2$$

$A = R(B) \Leftrightarrow a = e^{-i\frac{\pi}{2}}(b-w)+w$ لدينا:

$$\Leftrightarrow w-a = -e^{-i\frac{\pi}{2}}(b-w)$$

$$\Leftrightarrow \frac{w-a}{b-w} = -e^{-i\frac{\pi}{2}}$$

$$\Leftrightarrow \frac{w-a}{w-b} = e^{-i\frac{\pi}{2}}$$

$M' = R(M)$ و لدينا

$$m' = e^{-i\frac{\pi}{2}}(m-w)+w$$ أي

$$m'-a = e^{-i\frac{\pi}{2}}(m-w)+w-a$$ و منه

$$m'-a = -e^{-i\frac{\pi}{2}}(b-w)$$ أي

$$m'-a = \frac{w-a}{w-b}(m-w) - \frac{w-a}{w-b}(b-w)$$ إذن:

$$= \frac{w-a}{w-b}(m-w-b+w)$$

$$m'-a = \frac{w-a}{w-b}(m-b)$$ إذن:

A و M و Ω و B على استقامة $\Leftrightarrow (\overrightarrow{\Omega B};\overrightarrow{\Omega A}) \equiv (\overrightarrow{M'B};\overrightarrow{M'A})[\pi]$

$$\Leftrightarrow \arg\left(\frac{a-w}{b-w}\right) \equiv \arg\left(\frac{a-m}{b-m}\right)[\pi]$$

$\Leftrightarrow \text{Arg}\left(\frac{a-w}{b-w}\right) - \text{Arg}\left(\frac{a-m}{b-m}\right) \equiv 0\ [\pi]$

$\Leftrightarrow \text{Arg}\left(\frac{w-a}{w-b}\right) - \text{Arg}\left(\frac{m-a}{m-b}\right) \equiv 0\ [\pi]$

$\Leftrightarrow \text{Arg}\left(\frac{w-a}{w-b} \times \frac{m-b}{m-a}\right) \equiv 0\ [\pi]$

$\Leftrightarrow \text{Arg}\left(\frac{w-a}{w-b} \times (m-b) \times \frac{1}{m-a}\right) \equiv 0\ [\pi]$

$\Leftrightarrow \text{Arg}\left(\frac{m'-a}{m-a}\right) \equiv 0\ [\pi]$ (0,5)

$\Leftrightarrow \frac{m'-a}{m-a} \in \mathbb{R}$

$\Leftrightarrow$ النقط A و M و M' مستقيمية

إذن

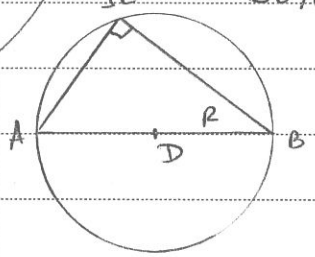
النقط A و M و M' مستقيمية $\Longleftrightarrow$ النقط A و Ω و B و Π متداورة

ج-

النقط A و Π و Π' مستقيمية $\Longleftrightarrow$ النقط A و Ω و Π و B متداورة

$\Leftrightarrow$ Π تنتمي إلى الدائرة المحيطة بالمثلث $A\Omega B$ ✓

(0,5)



ولدينا $A = R(B)$ أي $\Omega A = \Omega B$

و $(\Omega A) \perp (\Omega B)$

إذن المثلث $A\Omega B$ قائم في Ω و الوتر $[AB]$ قطر للدائرة.

ومنه مركز الدائرة هو منتصف $[AB]$

$$z_D = \frac{a+b}{2} = \frac{-1-i+2}{2}$$

لحق الشعاع $\boxed{z_D = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}i}$ ✓

R شعاع هذه الدائرة، $R = |D - \Omega| = \left|\frac{1}{2} - \frac{1}{2}i - i\right|$

$$\boxed{R} = \left|\frac{1}{2} - \frac{3}{2}i\right| = \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{9}{4}} = \boxed{\frac{\sqrt{10}}{2}}$$ ✓

ب) $t = -u \Rightarrow u = u$

و $t = 0 \Rightarrow u = 0$

و $du = -dt \Rightarrow dt = -du$

إذن: حسب تغيير المتغير:

$$F(-u) = \int_0^{-u} e^{t^2} dt = -\int_0^u e^{u^2} du$$

$$F(-u) = -F(u) \quad \checkmark$$

إذن F دالة فردية (0,5)

بما أن الدالة فردية

و $\lim\limits_{u \to +\infty} F(u)$

فإنه ✓

نضع $t = -u$ $\lim\limits_{u \to -\infty} F(u) = \lim\limits_{t \to +\infty} F(-t)$

لأن F فردية $= \lim\limits_{t \to +\infty} -F(t)$

إذن $\lim\limits_{u \to -\infty} F(u) = -\infty$ ✓

ج- لدينا F مستمرة وتزايدية قطعا على $\mathbb{R}$ ✓

إذن F تقابل من $\mathbb{R}$ نحو $F(\mathbb{R})$

ومنه $F(\mathbb{R}) = \left]\lim\limits_{u \to -\infty} F(u), \lim\limits_{u \to +\infty} F(u)\right[$ (0,5)

$=]-\infty, +\infty[= \mathbb{R}$ ✓

ومنه F تقابل من $\mathbb{R}$ نحو $\mathbb{R}$

د- برهنت ① أن F قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ و $F'(u) = e^{u^2}$

و $F(0) = 0 \Leftrightarrow G(0) = 0$

ومنه فإن F قابلة للاشتقاق ✓

في الصفر $F'(0) = e^0 = 1 \neq 0$ (0,5)

ومنه فإن F' لا تنعدم في 0 ✓

إذن G قابلة للاشتقاق في 0

و $G'(0) = \dfrac{1}{F'(G(0))} = \dfrac{1}{F'(0)} = \dfrac{1}{1}$

إذن $\boxed{G'(0) = 1}$ ✓

ROYAUME DU MAROC

MINISTÈRE DE L'EDUCATION NATIONALE
DE LA FORMATION PROFESSIONNELLE
DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR
ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE

ACADÉMIE RÉGIONALE
D'EDUCATION ET DE FORMATION
REGION CASABLANCA - SETTAT

Série ou Filière : ..... Niveau : .....

EXAMEN DU BACCALAUREAT

Matière : .....

Note définitive sur 20 .....

Appréciations expliquant la note chiffrée .....

RESERVE AU SECRETARIAT

NOM DU CORRECTEUR ET SIGNATURE : .....

الأعداد العقدية:

1) أ- $z^2 + (im+2)z + im + 2 - m = 0$

$\Delta = (im+2)^2 - 4(im+2-m)$

$= -m^2 + 4 + 4im - 4im - 8 + 4m$

$= -m^2 - 4 + 4m$ 0,25

$= (im)^2 + (2i)^2 - 2 \times 2i \times im$

$\Delta = (im - 2i)^2$ إذن

ب- حالة 1 - إذا كان $m = 2$ فإن $\Delta = 0$

و منه المعادلة تقبل حلا وحيدا هو

$z = \frac{-im-2}{2} = \frac{-i \times 2 - 2}{2} = -1 - i$

$\boxed{z = -1 - i}$ إذن ✓ 0,5

حالة 2 إذا كان $m \neq 2$ فإن $\Delta \neq 0$

ومنه للمعادلة حلين هما

$\begin{cases} z_1 = \frac{-im - 2 + im - 2i}{2} \\ z_2 = \frac{-im - 2 - im + 2i}{2} \end{cases}$ و

$\begin{cases} z_1 = -1 - i \\ z_2 = -im - 1 + i \end{cases}$ ✓ ✓ إذن

$(E_m) = \{-1 - i ; -im - 1 + i\}$ ✓

$$\lim_{h \to 0^+} g(h) = \lim_{h \to 0^+} f(h) - h$$

$$= f(0) - 0 \quad \text{لأن } f \text{ متصلة على اليمين في الصفر}$$

$$= 1 \quad \checkmark$$

$$\underline{g(]0,+\infty[) =]-\infty, 1[} \quad \checkmark \quad \text{إذن}$$

ج - ليكن n من $]0,+\infty[$

الدالة g متصلة على $]0,+\infty[$

لأن f متصلة على $]0,+\infty[$ و $h \longmapsto -h$ متصلة على $]0,+\infty[$

و الدالة g تناقصية قطعا على $]0,+\infty[$ إذن فهي تقابل.

ولدينا $0 \in g(]0,+\infty[) =]-\infty, 1[$

إذن

$$(\exists! \alpha \in]0,+\infty[) \ / \ g(\alpha) = 0 \quad (0,5)$$

$$(\exists! \alpha \in]0,+\infty[) \ / \ f(\alpha) - \alpha = 0 \quad \checkmark \quad \text{إذن}$$

$$\underline{(\exists! \alpha \in]0,+\infty[) \ / \ f(\alpha) = \alpha} \quad \text{أي}$$

ج - أ- ليكن a من $]0,+\infty[$

لدينا $u_0 = a > 0$ لأجل $n=0$

ليكن n من $\mathbb{N}$

نفترض أن $u_n > 0$

لنبين أن $u_{n+1} > 0$

لدينا $u_n > 0$ و f تزايدية قطعا على $]0,+\infty[$ $\checkmark$

ومنه $f(u_n) > f(0)$

$(0,25)$

أي $f(u_n) > 1 > 0$

إذن $u_{n+1} > 0$

ومنه حسب مبدأ الترجع

$$(\forall n \in \mathbb{N}) \quad u_n > 0 \ \checkmark$$

ROYAUME DU MAROC

MINISTÈRE DE L'EDUCATION NATIONALE
DE LA FORMATION PROFESSIONNELLE
DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR
ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE
ACADÉMIE RÉGIONALE
D'EDUCATION ET DE FORMATION
REGION CASABLANCA - SETTAT

Série ou Filière : ..... Niveau : .....

EXAMEN DU BACCALAUREAT

Matière : .....

Note définitive sur 20 .....

Appréciations expliquant la note chiffrée .....

RESERVE AU SECRETARIAT

NOM DU CORRECTEUR ET SIGNATURE : .....

ب - لدينا : f متصلة على $[0,+\infty[$

و f قابلة للإشتقاق على $]0,+\infty[$

ولدينا

$$(\forall n \in]0,+\infty[) ; -\frac{1}{2} \leq 0 \leq f'(n) \leq \frac{1}{2}$$

إذن ✓

$$(\forall n \in]0,+\infty[) ; \boxed{|f'(n)| \leq \frac{1}{2}}$$

و ✓ $u_n \in]0,+\infty[$ أي $u_n > 0$

و α عنصر من $]0,+\infty[$

0,5 ✓ إذن α و u_n عنصران من $]0,+\infty[$

إذن حسب متفاوتة التزايدات المنتهية:

$$|f(u_n) - f(\alpha)| \leq \frac{1}{2} |u_n - \alpha| \quad \checkmark$$

ولدينا $f(\alpha) = \alpha$ و $f(u_n) = u_{n+1}$

إذن ✓ $|u_{n+1} - \alpha| \leq \frac{1}{2} |u_n - \alpha|$

ج - لدينا من أجل $n = 0$

$|u_0 - \alpha| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^0 |a - \alpha|$

أي

$|a - \alpha| \leq |a - \alpha|$ ✓ وهذا صحيح

ليكن n من IN

نفترض أن :

$|u_n - \alpha| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n |a - \alpha|$

لنبين أن :

$|u_{n+1} - \alpha| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} |a - \alpha|$

0,25 لدينا ✓ $|u_n - \alpha| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n |a - \alpha|$

ومنه $\boxed{\frac{1}{2} |u_n - \alpha| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} |a - \alpha|}$ (1)

ولدينا حسب III - 2 -

$\boxed{|u_{n+1} - \alpha| \leq \frac{1}{2} |u_n - \alpha|}$ (2) ✓

لأن $\lim_{x \to 0^+} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1$

و $\lim_{x \to 0^+} 1+x = 1$

إذن f مستمرة على اليمين في 0

ب - قابلية الإشتقاق :

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \to 0^+} \frac{\frac{x+1}{x} \times \ln(1+x) - 1}{x}$$

$$= \lim_{x \to 0^+} \frac{(x+1)\ln(1+x) - x}{x^2}$$

$$= \lim_{x \to 0^+} \frac{x\ln(1+x) + \ln(1+x) - x}{x^2}$$

$$= \lim_{x \to 0^+} \frac{x\ln(1+x)}{x^2} - \frac{x - \ln(1+x)}{x^2}$$

$$= \lim_{x \to 0^+} \frac{\ln(1+x)}{x} - \frac{x - \ln(1+x)}{x^2}$$

$= 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$

لأن $\lim_{x \to 0^+} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1$

و $2 - I \longrightarrow \lim_{x \to 0^+} \frac{x - \ln(1+x)}{x^2} = \frac{1}{2}$

ج -

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} \left(\frac{x+1}{x}\right) \ln(1+x) = +\infty$$

لأن $\lim_{x \to +\infty} \frac{x+1}{x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{1 + \frac{1}{x}}{1} = 1$

و $\lim_{x \to +\infty} \ln(1+x) = +\infty$

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{x+1}{x^2} \times \ln(1+x)$$

$$= \lim_{x \to +\infty} \frac{(x+1)^2}{x^2} \times \frac{\ln(1+x)}{1+x} = 0$$

ROYAUME DU MAROC

MINISTÈRE DE L'EDUCATION NATIONALE DE LA FORMATION PROFESSIONNELLE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE

ACADÉMIE RÉGIONALE D'EDUCATION ET DE FORMATION REGION CASABLANCA - SETTAT

Série ou Filière : ..... Niveau : .....

EXAMEN DU BACCALAUREAT

Matière : .....

Note définitive sur 20 .....

Appréciations expliquant la note chiffrée .....

RESERVE AU SECRETARIAT

NOM DU CORRECTEUR ET SIGNATURE : .....

لأن : $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{\ln(1+n)}{1+n} = 0$ ✓

و $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{(n+1)^2}{n^2} = \lim\limits_{n\to+\infty} \left(\frac{n+1}{n}\right)^2 = 1$ ✓

نستنتج مما سبق أن (C_g) يقبل فرع شلجمي باتجاه محور الأفاصيل $(+\infty)$ (0,25)

ب - أ - الدالة $n \mapsto \ln(1+n)$ قابلة للاشتقاق على $]0,+\infty[$ لأن $(\forall n \in \mathbb{R}^{+*}) : 1+n > 0$ ✓

و الدالة $n \mapsto n+1$ قابلة للاشتقاق على $]0,+\infty[$

و هما حدوديتان

و الدالة $n \mapsto \frac{1}{n}$ قابلة للاشتقاق على $]0,+\infty[$ ✓

لأنه مجال مضمن مجموعة تعريفها.

إذن g قابلة للاشتقاق على $]0,+\infty[$ لأنها جداء هذه الدوال. (0,5)

ليكن $n \in]0,+\infty[$; نعلم أن g قابلة للاشتقاق على $]0,+\infty[$; أي

$$g'(n) = \frac{n+1}{n} \times \frac{1}{n+1} + \ln(1+n) \times \frac{n-(n+1)}{n^2}$$

$$= \frac{1}{n} - \frac{\ln(1+n)}{n^2}$$

$$g'(n) = \frac{n - \ln(1+n)}{n^2}$$ ✓

إذن

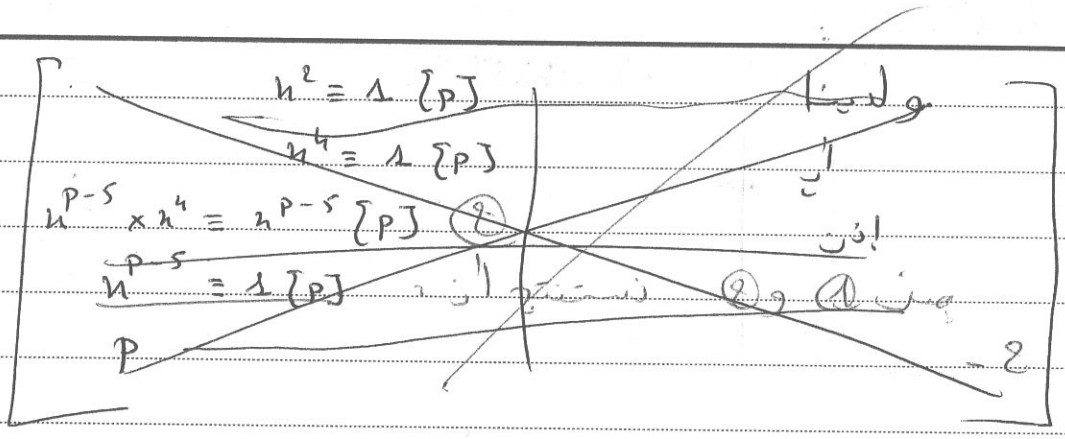
ب - لدينا حسب I ج :

$(\forall n \in]0,+\infty[)$:

$$\frac{1}{2(1+n)} \leq \frac{n - \ln(1+n)}{n^2} = g'(n)$$

$\frac{1}{2(1+n)} > 0$ ✓ وبما أن $n > 0$ فإن $\frac{1}{1+n} > 0$

$(\forall n \in]0,+\infty[)$: $g'(n) > 0$ ، إذن



ولدينا

أي

إذن

ومن ① و ② نستنتج أن :

ع ـ

الحساب :

1 ـ ليكن n عدد صحيح نسبي و p عدد أولي

لدينا : $p - 5 = 3 + 4k - 5 = 4k - 2$

$= 2(2k - 1)$

ولدينا $k > 0$ ✓

أي $2k - 1 > 0$

0,5

ولدينا : $n^2 \equiv 1 [p]$

أي $n^{2(2k-1)} \equiv 1^{2k-1} [p] \equiv 1 [p]$

إذن $n^{p-5} \equiv 1 [p]$ ✓

ع ـ أ ـ لدينا : $n^{p-5} \equiv 1 [p]$

أي $(\exists k \in \mathbb{Z}) : n^{p-5} = 1 + pk$

ومنه $n^{p-5} - pk = 1$

أي $(p-6>0)\ n^{p-6} \times n - pk = 1$ ✓

0,5

ومنه حسب مبرهنة بيزو (يوجد n^{p-6} و $-k$ من $\mathbb{Z}$)

n و p أوليين فيما بينهما.

ب ـ لدينا p عدد أولي موجب

و n و p أوليين فيما بينهما ✓

ومنه حسب مبرهنة فيرما الصغرى :

0,8 ✓ $n^{p-1} \equiv 1 [p]$

ج ـ أ) لنتحقق أن $2 + (k-1)(p-1) - k(p-5) = 0$

لدينا : $2 + (k-1)(p-1) - k(p-5) = 2 + kp - p - k + 1 - kp + 5k$

$= 3 + 4k - p = p - p = 0$ (لأن $p = 3 + 4k$)

ROYAUME DU MAROC

MINISTÈRE DE L'EDUCATION NATIONALE DE LA FORMATION PROFESSIONNELLE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE

ACADÉMIE RÉGIONALE D'EDUCATION ET DE FORMATION REGION CASABLANCA - SETTAT

Série ou Filière : ..... Niveau : .....

EXAMEN DU BACCALAUREAT

Matière : .....

Note définitive sur 20 .....

Appréciations expliquant la note chiffrée .....

RESERVE AU SECRETARIAT

NOM DU CORRECTEUR ET SIGNATURE : .....

$2 + (k-1)(p-1) - k(p-5) = 0$ إذن (0,8)

$2 + (k-1)(p-1) = k(p-5)$ ومنه

لدينا $n^{p-1} \equiv 1 [p]$

أي $n^{(p-1)(k-1)} \equiv 1^{(k-1)} [p] \equiv 1 [p]$

ومنه $n^{(p-1)(k-1)} \times n^2 \equiv n^2 [p]$

$\Rightarrow n^{2+(p-1)(k-1)} \equiv n^2 [p]$

ولدينا $2 + (p-1)(k-1) = k(p-5)$

إذن: $\Rightarrow n^{k(p-5)} \equiv n^2 [p]$ (1)

(0,5) ولدينا: $n^{p-5} \equiv 1 [p]$

أي $n^{k(p-5)} \equiv 1^k [p] \equiv 1 [p]$ (2)

من (1) و (2) لدينا: $n^2 \equiv 1 [p]$

3 - لدينا حسب الأسئلة السابقة: $n^2 \equiv 1 [p] \Leftrightarrow n^{p-5} \equiv 1 [p]$

في حالة $p = 67$ لدينا: $67 = 3 + 4 \times 16$

أي $n^{62} \equiv 1 [67] \Leftrightarrow n^{67-5} \equiv 1 [67]$

وبما أن $n^2 \equiv 1 [p] \Leftrightarrow n^{p-5} \equiv 1 [p]$

فإن $n^{62} \equiv 1 [67] \Leftrightarrow n^2 \equiv 1 [\ ]$

$\Leftrightarrow n^2 - 1 \equiv 0 [67]$

$\Leftrightarrow (n-1)(n+1) \equiv 0 [67]$

$\Leftrightarrow n-1 \equiv 0 [67]$ أو $n+1 \equiv 0 [67]$

لأن 67 أولي

$n^{62} \equiv 1 [67] \Leftrightarrow n = 1 + 67k$ أو $n = 67k - 1$ (k من $\mathbb{Z}$)

إذن $S = \{1 + 67k ; 67k - 1 / k \in \mathbb{Z}\}$ (0,8)

ومنه:

$$\begin{pmatrix} x & -2y \\ y & x+2y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

أي $x=0$ و $y=0$ و $-2y=0$ و $x+2y=0$

إذن $x=0$ و $y=0$

ومنه (I,J) أسرة حرة.

أي (I,J) أساس الفضاء المتجهي الحقيقي $(E,+,\cdot)$

3- أ- نعلم أن E جزء غير فارغ من $M_2(\mathbb{R})$

ليكن a و b و x و y من $\mathbb{R}$

$$M(a,b)\times M(x,y) = \begin{pmatrix} a & -2b \\ b & a+2b \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} x & -2y \\ y & x+2y \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} ax-2by & -2ya-2bx-4by \\ bx+ay+2by & -2by+ax+2ya+2bx+4by \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} ax-2by & -2(ya+bx+2by) \\ bx+ay+2by & ax-2by+2(ya+bx+2by) \end{pmatrix}$$

0,8

$$= M(ax-2by;\ bx+ay+2by) \in E$$

لأن $ax-2by$ و $bx+ay+2by$ عنصران من $\mathbb{R}$

إذن E جزء مستقر من $(M_2(\mathbb{R}),\times)$

ب- لدينا: $(E,+,\cdot)$ فضاء متجهي حقيقي

أي $(E,+)$ زمرة تبادلية

ولدينا: E زمرة جزئية لـ الزمرة $(M_2(\mathbb{R}),+)$

أي E جزء مستقر من $(M_2(\mathbb{R}),+)$

ولدينا: E جزء مستقر من $(M_2(\mathbb{R}),\times)$

$\Leftrightarrow \text{Arg}\left(\frac{a-w}{b-w}\right) - \text{Arg}\left(\frac{a-m}{b-m}\right) \equiv 0\ [\pi]$

$\Leftrightarrow \text{Arg}\left(\frac{w-a}{w-b}\right) - \text{Arg}\left(\frac{m-a}{m-b}\right) \equiv 0\ [\pi]$

$\Leftrightarrow \text{Arg}\left(\frac{w-a}{w-b} \times \frac{m-b}{m-a}\right) \equiv 0\ [\pi]$

$\Leftrightarrow \text{Arg}\left(\frac{w-a}{w-b} \times (m-b) \times \frac{1}{m-a}\right) \equiv 0\ [\pi]$

$\Leftrightarrow \text{Arg}\left(\frac{m'-a}{m-a}\right) \equiv 0\ [\pi]$ 0,5

$\Leftrightarrow \frac{m'-a}{m-a} \in \mathbb{R}$

$\Leftrightarrow$ A و M و M' مستقيمية

إذن

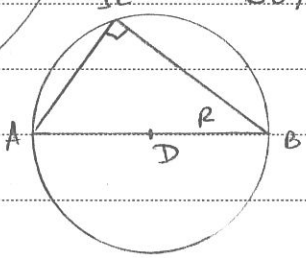
A و M و M' مستقيمية $\Longleftrightarrow$ A و B و Ω و Π متداورة

ج-

A و Π و Π' مستقيمية $\Longleftrightarrow$ A و B و Ω و Π متداورة

Π تنتمي إلى الدائرة المحيطة بالمثلث $A\Omega B$ ✓

0,5



ولدينا $A = R(B)$ أي $\Omega A = \Omega B$

و $(\Omega A) \perp (\Omega B)$

إذن $[AB]$ قطر للدائرة.

ومنه مركز الدائرة هو منتصف $[AB]$

$$z_D = \frac{a+b}{2} = \frac{-1-i+2}{2}$$

$$\boxed{z_D = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}i}$$ لحق الشعاع ✓

R شعاع هذه الدائرة،

$$R = |D - \Omega| = \left|\frac{1}{2} - \frac{1}{2}i - i\right|$$

$$\boxed{R} = \left|\frac{1}{2} - \frac{3}{2}i\right| = \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{9}{4}} = \boxed{\frac{\sqrt{10}}{2}}$$ ✓

ROYAUME DU MAROC

MINISTÈRE DE L'EDUCATION NATIONALE
DE LA FORMATION PROFESSIONNELLE
DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR
ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE

ACADÉMIE RÉGIONALE
D'EDUCATION ET DE FORMATION
REGION CASABLANCA - SETTAT

Série ou Filière : ..... Niveau : .....

EXAMEN DU BACCALAUREAT

Matière : .....

Note définitive sur 20 .....

Appréciations expliquant la note chiffrée .....

RESERVE AU SECRETARIAT

NOM DU CORRECTEUR ET SIGNATURE : .....

وبما أن الضرب توزيعي بالنسبة للجمع في $M_2(\mathbb{R})$
فإن الضرب توزيعي بالنسبة للجمع في E.
ونعلم أن E جزء مستقر من $(M_2(\mathbb{R}), \times)$
و الضرب تجميعي في $M_2(\mathbb{R})$
إذن فهو تجميعي في E. — ليكن a, b, x, y من $\mathbb{R}$

لدينا : $\Omega(a,b) \times \Omega(x,y) = \Omega(ax - 2by ; bx + ay + 2by)$

حسب السؤال السابق

و : $M(x,y) \times M(a,b) = \begin{pmatrix} x & -2y \\ y & x+2y \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} a & -2b \\ b & a+2b \end{pmatrix}$

$= \begin{pmatrix} xa - 2yb & -2ay - 2xb - 4yb \\ xb + ya + 2yb & -2yb + xa + 2ay + 2xb + 4yb \end{pmatrix}$

$\Omega(x,y) \times \Omega(a,b) = M(xa - 2yb ; xb + ya + 2yb)$ ✓

ومنه $\Omega(x,y) \times \Omega(a,b) = \Omega(a,b) \times \Omega(x,y)$

إذن الضرب تبادلي في E. ✓

ومنه نستنتج أن $(E, +, \times)$ حلقة تبادلية. ✓

4 - أ - ليكن $a+ib$ و $x+iy$ عنصرين من $\mathbb{C}^*$

$\varphi((x+iy)(a+ib)) = \varphi(xa + iya + ibx - yb)$

$= \varphi(xa - yb + i(bx + ya))$ ✓

$= M(xa - yb + bx + ya ; -bx - ya)$