

الجداء المتجهي

I- توجيه الفضاء

1- معلم موجه في الفضاء

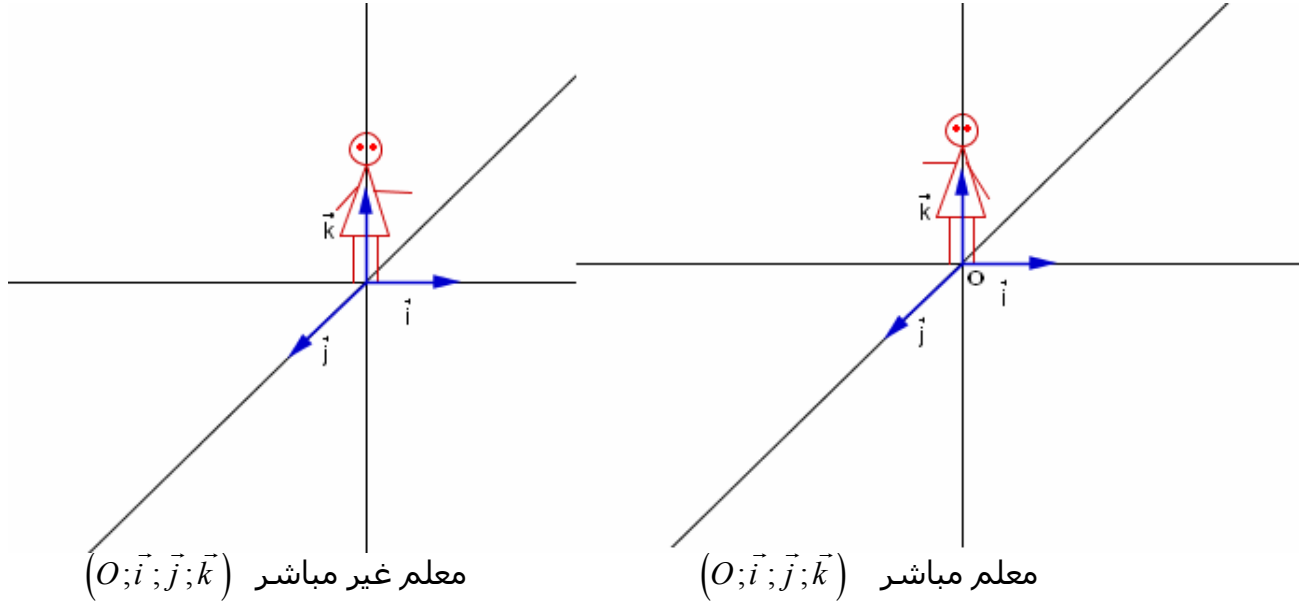
ننسب الفضاء E إلى معلم $(O; \vec{i}; \vec{j}; \vec{k})$

لتكن I و J و K ثلاث نقط حيث $\vec{OI} = \vec{i}$ $\vec{OJ} = \vec{j}$ $\vec{OK} = \vec{k}$

« رجل أمبير » للمعلم $(O; \vec{i}; \vec{j}; \vec{k})$ هو رجل خيالي رأسه في النقطة K قدماه على النقطة O و ينظر

إلى I

, النقطة J إما توجد على يمين « رجل أمبير » أو على يساره .



تعريف :

الفضاء منسوب إلى معلم $(O; \vec{i}; \vec{j}; \vec{k})$. لتكن I و J و K ثلاث نقط حيث $\vec{OI} = \vec{i}$ $\vec{OJ} = \vec{j}$ $\vec{OK} = \vec{k}$

نقول إن : * $(O; \vec{i}; \vec{j}; \vec{k})$ معلم مباشر إذا وجدت J على يسار « رجل أمبير »

* $(O; \vec{i}; \vec{j}; \vec{k})$ معلم غير مباشر إذا وجدت J على يمين « رجل أمبير »

أمثلة * نعتبر $(O; \vec{i}; \vec{j}; \vec{k})$ معلم مباشر

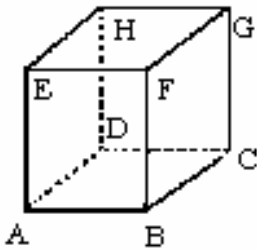
$(O; \vec{j}; \vec{i}; \vec{k})$ معلم غير مباشر $(O; \vec{i}; \vec{j}; -\vec{k})$ معلم غير مباشر

$(O; \vec{j}; \vec{k}; \vec{i})$ معلم مباشر

** ABCDEFGH مكعب طول حرفه 1

معلمان مباشران $(A; \vec{AB}; \vec{AD}; \vec{AE})$; $(B; \vec{BC}; \vec{BA}; \vec{BF})$

معلمان غير مباشرين $(A; \vec{AD}; \vec{AB}; \vec{AE})$, $(E; \vec{EA}; \vec{EF}; \vec{EH})$



2- الأسيرة المباشرة

يمكننا توجيه الفضاء V_3 , إذا وجهنا جميع أساساته

تعريف

نقول إن الأساس المتعامد الممنظم $(\vec{i}; \vec{j}; \vec{k})$ مباشر إذا كان $(O; \vec{i}; \vec{j}; \vec{k})$ م.م.م. مباشر مهما كانت النقطة O

من الفضاء

3- توجيه المستوى

ليكن (P) مستوى في الفضاء و $\vec{k}$ متجهة واحدة و منتظمة على (P) , و O نقطة من المستوى (P)

$(O; \vec{i}; \vec{j})$ م.م.م. للمستوى (P)

لدينا $(O; \vec{i}; \vec{j}; \vec{k})$ معلم متعامد ممنظم للفضاء E

يكون المعلم المتعامد الممنظم $(O; \vec{i}; \vec{j})$ في المستوى (P) معلما مباشرا اذا كان المعلم المتعامد

الممنظم $(O; \vec{i}; \vec{j}; \vec{k})$ مباشرا

- * يتم توجيه مستوى (P) بتوجيه متجهة منتظمة عليه.
- * كل المستويات الموازية لـ (P) له نفس توجيه المستوى (P)

II - الجداء المتجهي

1- تعريف

لتكن $\vec{u}$ و $\vec{v}$ متجهتين من الفضاء V_3 و A و B نقطتين من الفضاء E بحيث $\vec{v} = \overrightarrow{OB}$ $\vec{u} = \overrightarrow{OA}$ الجداء المتجهي للمتجهتين $\vec{u}$ و $\vec{v}$ في هذا الترتيب، هو المتجهة التي لها بـ $\vec{u} \wedge \vec{v}$ المعرفة كما يلي :

- * إذا كانتا $\vec{u}$ و $\vec{v}$ مستقيمتين فان $\vec{u} \wedge \vec{v} = \vec{0}$.
- * إذا كانتا $\vec{u}$ و $\vec{v}$ غير مستقيمتين فان $\vec{u} \wedge \vec{v}$ هي المتجهة التي تحقق :
- $\vec{u} \wedge \vec{v}$ عمودي على كل من $\vec{u}$ و $\vec{v}$
- $(\vec{u}; \vec{v}; \vec{u} \wedge \vec{v})$ أساس مباشر .

$$\|\vec{u} \wedge \vec{v}\| = \|\vec{u}\| \|\vec{v}\| \sin \theta \quad \text{حيث } \theta \text{ قياس الزاوية } [\widehat{AOB}]$$

أمثلة * نعتبر $(O; \vec{i}; \vec{j}; \vec{k})$ معلم متعامد ممنظم مباشر

$$\vec{i} \wedge \vec{i} = \vec{j} \wedge \vec{j} = \vec{k} \wedge \vec{k} = \vec{0}$$

$$\vec{i} \wedge \vec{j} = \vec{k} \quad \vec{j} \wedge \vec{k} = \vec{i} \quad \vec{k} \wedge \vec{i} = \vec{j}$$

$$\vec{j} \wedge \vec{i} = -\vec{k} \quad \vec{k} \wedge \vec{j} = -\vec{i} \quad \vec{i} \wedge \vec{k} = -\vec{j}$$

* إذا كان $\vec{u}$ و $\vec{v}$ متجهتين واحدتين و متعامدتين فان $(\vec{u}; \vec{v}; \vec{u} \wedge \vec{v})$ أساس مباشر .

$$\text{نحسب } \|\vec{u} \wedge \vec{v}\| \text{ علما أن } \theta \in]0; \pi[\quad (\vec{u}; \vec{v}) = \theta \quad \vec{u} \cdot \vec{v} = -5 \quad \|\vec{v}\| = 2 \quad \|\vec{u}\| = 5$$

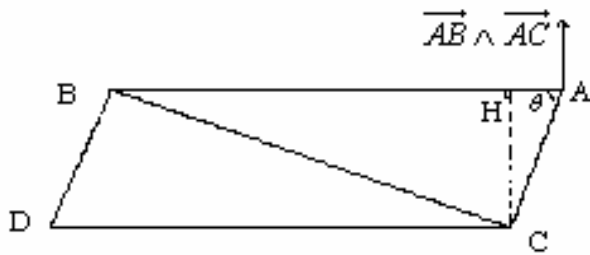
تمرين

2- خاصيات

أ- خاصية

إذا كانت B و C ثلاث نقط غير مستقيمية من الفضاء فان المتجهة $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}$ منتظمة على المستوى (ABC).

لتكن B و C ثلاث نقط غير مستقيمية من الفضاء θ قياس الزاوية $[\widehat{CAB}]$, H المسقط العمودي لـ C على (AB)



$$\|\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}\| = AB \cdot AC \cdot \sin \theta \quad HC = AC \sin \theta$$

$$\|\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}\| = AB \times HC$$

خاصية

$$\|\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}\| \text{ مساحة المثلث ABC هو نصف}$$

نتيجة

$$\|\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}\| \text{ مساحة متوازي الأضلاع ABDC هي}$$

د- خاصية

لتكن $\vec{u}$ و $\vec{v}$ متجهتين من الفضاء يكون $\vec{u} \wedge \vec{v}$ منعزلا إذا فقط كان $\vec{u}$ و $\vec{v}$ مستقيمتين

البرهان * $\Rightarrow$ (بديهية - التعريف)

$\Leftarrow *$

$$\vec{u} \wedge \vec{v} = \vec{0} \Leftrightarrow \|\vec{u} \wedge \vec{v}\|$$

$$\Rightarrow \|\vec{u}\| \|\vec{v}\| \sin \theta = 0$$

$$\Leftrightarrow \|\vec{u}\| = 0 \quad \vee \quad \|\vec{v}\| = 0 \quad \vee \quad \sin \theta = 0$$

$$\Leftrightarrow \vec{u} = \vec{0} \quad \vee \quad \vec{v} = \vec{0} \quad \vee \quad \vec{u} \text{ et } \vec{v} \text{ sont liés}$$

$$\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC} = \vec{0} \Leftrightarrow A, B, C \text{ مستقيمات}$$

ملاحظة ج- الحداء المتجهي والعمليات (نقل)

$$\forall (\vec{u}; \vec{v}; \vec{w}) \in V_3^3$$

$$\forall \alpha \in \mathbb{R}$$

$$(\vec{u} + \vec{v}) \wedge \vec{w} = \vec{u} \wedge \vec{w} + \vec{v} \wedge \vec{w}$$

$$(\alpha \vec{u}) \wedge \vec{v} = \alpha (\vec{u} \wedge \vec{v})$$

$$\vec{u} \wedge \vec{v} = -(\vec{v} \wedge \vec{u})$$

$$\vec{u} \wedge \vec{u} = \vec{0} \wedge \vec{u} = \vec{u} \wedge \vec{0} = \vec{0}$$

تمرين

معلم متعامد ممنظم مباشر . $(o; \vec{i}; \vec{j}; \vec{k})$

$$\text{أحسب} \quad \vec{i} \wedge 3\vec{j} \quad (\vec{i} + 2\vec{k}) \wedge \vec{j} \quad (\vec{i} + \vec{j} - 2\vec{k}) \wedge \vec{k} \quad (2\vec{i} - \vec{j}) \wedge (3\vec{i} + 4\vec{j})$$

تمرين

$$\vec{a} \wedge \vec{c} = \vec{b} \wedge \vec{d} \quad ; \quad \vec{a} \wedge \vec{b} = \vec{c} \wedge \vec{d} \quad \text{لتكن}$$

بين إن $\vec{a} - \vec{d}$ و $\vec{b} - \vec{c}$ مسنقيمتان

3- الصيغة التحليلية للحداء المتجهي في م.م.م مباشر.

معلم متعامد ممنظم مباشر $(o; \vec{i}; \vec{j}; \vec{k})$

$$\vec{u}(x; y; z) \quad \vec{v}(x'; y'; z')$$

$$\vec{u} \wedge \vec{v} = (x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}) \wedge (x'\vec{i} + y'\vec{j} + z'\vec{k})$$

$$= (yz' - zy')\vec{i} + (zx' - xz')\vec{j} + (xy' - yx')\vec{k}$$

خاصية

الفضاء E منسوب إلى معلم متعامد ممنظم مباشر $(O; \vec{i}; \vec{j}; \vec{k})$ و $\vec{u}(x; y; z)$ و $\vec{v}(x'; y'; z')$ متجهتان

من V_3

إحداثيات الحداء المتجهي $\vec{u} \wedge \vec{v}$ بالنسبة للأساس $(\vec{i}; \vec{j}; \vec{k})$ هو $(X; Y; Z)$ حيث

$$X = yz' - zy' \quad Y = zx' - xz' \quad Z = xy' - yx'$$

ملاحظة يمكن استعمال الوضعية التالية

$$\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x & y & z \\ x' & y' & z' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x & y & z \\ x' & y' & z' \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \end{vmatrix}$$

$$\begin{aligned} Z &= xy' - yx' \\ Y &= zx' - xz' \\ X &= yz' - zy' \end{aligned}$$

$$\vec{v}(-2; -1; 1) \quad \vec{u}(1; 2; 0) \quad A(1; 2; 1) \quad B(0; -3; 2) \quad C(1; 2; 1)$$

أحسب مساحة المثلث (ABC)

حدد $\vec{u} \wedge \vec{v}$

مثال

III - تطبيقات الحداء المتجهي

1- معادلة مستوى معرف بثلاث نقط غير مستقيمة

خاصية

لتكن A و B و C ثلاث نقط غير مستقيمة من فضاء منسوب الى معلم متعامد ممنظم مباشر

$$M \in (ABC) \Leftrightarrow (\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}) \cdot \overrightarrow{AM}$$

مثال نعتبر A(1;2;3) و B(1;-1;1) و C(2;1;2) حدد معادلة المستوى (ABC)

2- تقاطع مستويين

نعتبر في فضاء منسوب الى معلم متعامد ممنظم مباشر

$$(P) : ax+by+cz+d=0$$

$$(P') : a'x+b'y+c'z+d'=0$$

لدينا $\vec{n}(a;b;c)$ منظمية لـ (P) و $\vec{n}'(a';b';c')$ منظمية لـ (P')

* اذا كان (P) و (P') متقاطعين فان المستقيم (D) تقاطع (P) و (P') موجه بـ $\vec{n} \wedge \vec{n}'$

* اذا كان $\vec{n} \wedge \vec{n}' \neq 0$ فان (P) و (P') متقاطعان وفق مستقيم موجه بـ $\vec{n} \wedge \vec{n}'$

تمرين

حدد تقاطع (P): $x+2y-2z+3=0$ و (P'): $4x-4y+2z-5=0$

3- مسافة نقطة عن مستقيم

في الفضاء (D) مستقيم مار من A و موجه بـ $\vec{u}$, M نقطة من الفضاء و H مسقطها العمودي على (D)

$$\overrightarrow{AM} \wedge \vec{u} = (\overrightarrow{AH} + \overrightarrow{HM}) \wedge \vec{u} = \overrightarrow{HM} \wedge \vec{u} \quad \overrightarrow{AH} \perp \vec{u} \quad \text{liés}$$

$$\|\overrightarrow{AM} \wedge \vec{u}\| = \|\overrightarrow{HM} \wedge \vec{u}\| = HM \cdot \|\vec{u}\| \sin \frac{\pi}{2} = HM \cdot \|\vec{u}\|$$

$$HM = \frac{\|\overrightarrow{AM} \wedge \vec{u}\|}{\|\vec{u}\|}$$

خاصية

في الفضاء (D) مستقيم مار من A و موجه بـ $\vec{u}$, M نقطة من الفضاء.

$$d(M; (D)) = \frac{\|\overrightarrow{AM} \wedge \vec{u}\|}{\|\vec{u}\|} \quad \text{مسافة النقطة M عن المستقيم (D) هي}$$

تمرين

$$d(A; (D)) = ? \quad (D) : \begin{cases} x = 2 - t \\ y = 2t \\ z = 1 + t \end{cases} \quad t \in \mathbb{R} \quad A(3;2;-1)$$

تمرين

في فضاء منسوب إلى معلم متعامد ممنظم مباشر نعتبر A(1;2;1) و B(-2;1;3) و (D) المستقيم الذي

$$\begin{cases} x - 2y + z - 3 = 0 \\ 2x + 3y - z - 1 = 0 \end{cases} \quad \text{معادلته}$$

1- حدد $\overrightarrow{OA} \wedge \overrightarrow{OB}$ ثم حدد معادلة ديكارتية للمستوى (OAB)

2- حدد $d(A; (D))$

3- أعط معادلة ديكارتية للفلكة (S) التي مركزها A و مماسة للمستقيم (D)