

الهندسة الفضائية

(1) تذكير:

في الفضاء المنسوب إلى معلم متعدد منظم $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$

❖ لتكن $B(x_B, y_B, z_B)$ و $A(x_A, y_A, z_A)$

إحداثيات المتجهة $\overrightarrow{AB}(x_B - x_A, y_B - y_A, z_B - z_A) : \overrightarrow{AB}$

المسافة $AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2 + (z_B - z_A)^2} : AB$

إحداثيات I منتصف القطعة $I\left(\frac{x_A + x_B}{2}, \frac{y_A + y_B}{2}, \frac{z_A + z_B}{2}\right) : [AB]$

❖ لتكن $\vec{v}(x', y', z')$ و $\vec{u}(x, y, z)$

منظم متجهة $\|\vec{v}\| = \sqrt{x'^2 + y'^2 + z'^2}$ و $\|\vec{u}\| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$

الجداء السلمي: $\vec{u} \cdot \vec{v} = xx' + yy' + zz'$

خاصية: $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0 \Leftrightarrow \vec{u} \perp \vec{v}$

❖ تمثيل بارامטרי لمستقيم:

ليكن (D) المستقيم المار من النقطة $A(x_A, y_A, z_A)$ و موجه بالمتجهة $\vec{u}(\alpha, \beta, \gamma)$

$M(x, y, z) \in (D) \Leftrightarrow \vec{u}$ مستقيميتان و \overrightarrow{AM}

$(t \in \mathbb{R}) \quad \overrightarrow{AM} = t \vec{u} \Leftrightarrow$

$$(t \in \mathbb{R}) \quad \begin{cases} x = x_A + t\alpha \\ y = y_A + t\beta \\ z = z_A + t\gamma \end{cases} \Leftrightarrow$$

النقطة الأخيرة تسمى تمثيلا بارامetricا لمستقيم (D)

❖ معادلة ديكارتية لمستوى:

ليكن (P) المستوى المار من النقطة A و المتجهة $\vec{n}(a, b, c)$ منظمية لمستوى (P)

$$M(x, y, z) \in (P) \Leftrightarrow \overrightarrow{AM} \cdot \vec{n} = 0$$

$$\Leftrightarrow ax + by + cz + d = 0$$

خاصية:

إذا كان (P) مستوى معادلته $ax + by + cz + d = 0$ فإن $\vec{n}(a, b, c)$ هي متجهة منظمية لمستوى (P) .

❖ مسافة نقطة عن مستوى :

ليكن (P) مستوى معادلته $ax + by + cz + d = 0$ و $\Omega(x_\Omega, y_\Omega, z_\Omega)$ نقطة من الفضاء

$$d(\Omega, (P)) = \frac{|ax_\Omega + by_\Omega + cz_\Omega + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$$

الفلكة (2)

أ. تعريف :

لتكن Ω نقطة و r عدداً حقيقياً موجباً قطعاً
مجموعـة النقط M من الفضاء التي تحقق $\Omega M = r$ تسمى الفلكة التي مركزها Ω وشعاعها r ونرمز لها بالرمز : $S(\Omega, r)$

ب. معادلة ديكارتية لفلكة معرفة بمركزها وشعاعها :

معادلة ديكارتية لفلكة مركزها $\Omega(a, b, c)$ وشعاعها r هي :

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 + (z - c)^2 = r^2$$

ج . معادلة ديكارتية لفلكة معرفة بأحد أقطارها :

لتكن (S) فلكة أحد أقطارها $[AB]$ و M نقطة من الفضاء
 $M \in (S) \Leftrightarrow \overline{AM} \cdot \overline{BM} = 0$

د . دراسة E مجموعة النقط التي تحقق:

$$\left(x + \frac{a}{2}\right)^2 + \left(y + \frac{b}{2}\right)^2 + \left(z + \frac{c}{2}\right)^2 = \frac{a^2 + b^2 + c^2 - 4d}{4} \text{ تكافي } x^2 + y^2 + z^2 + ax + by + cz + d = 0$$

هناك ثلاثة حالات :

$$E : \frac{a^2 + b^2 + c^2 - 4d}{4} < 0 \quad \bullet$$

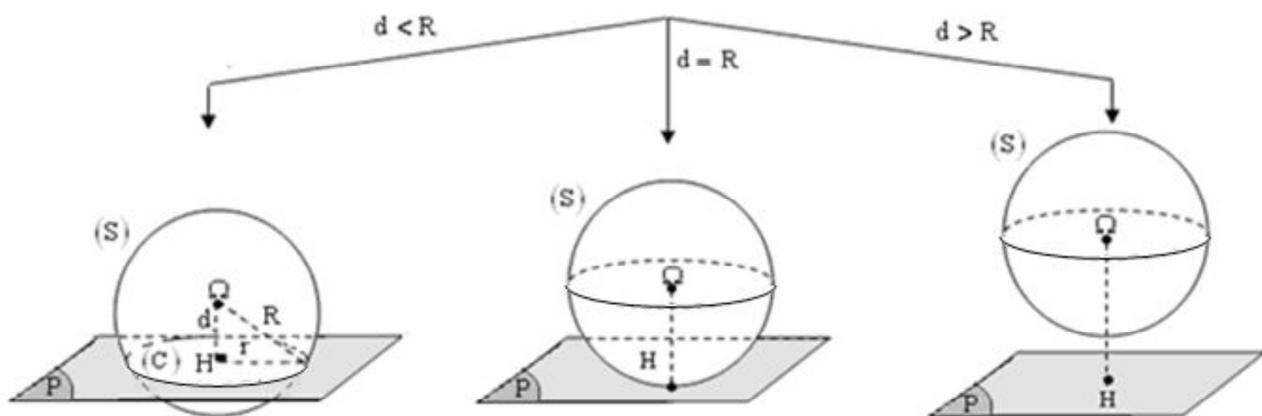
$$E : \frac{a^2 + b^2 + c^2 - 4d}{4} = 0 \quad \bullet$$

$$r = \frac{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2 - 4d}}{2} \Omega \left(\frac{-a}{2}, \frac{-b}{2}, \frac{-c}{2} \right) \text{ هي الفلكة الأحادية } E : \frac{a^2 + b^2 + c^2 - 4d}{4} > 0 \quad \bullet$$

(3) الأوضاع النسبية لفلكة ومستوى

لتكن (S) فلكة مركزها Ω وشعاعها R . نضع

لتكن H المسقط العمودي للمركز Ω على المستوى (P)



المستوى (P) يقطع الفلكة (S) وفق دائرة (C) مركزها H وشعاعها

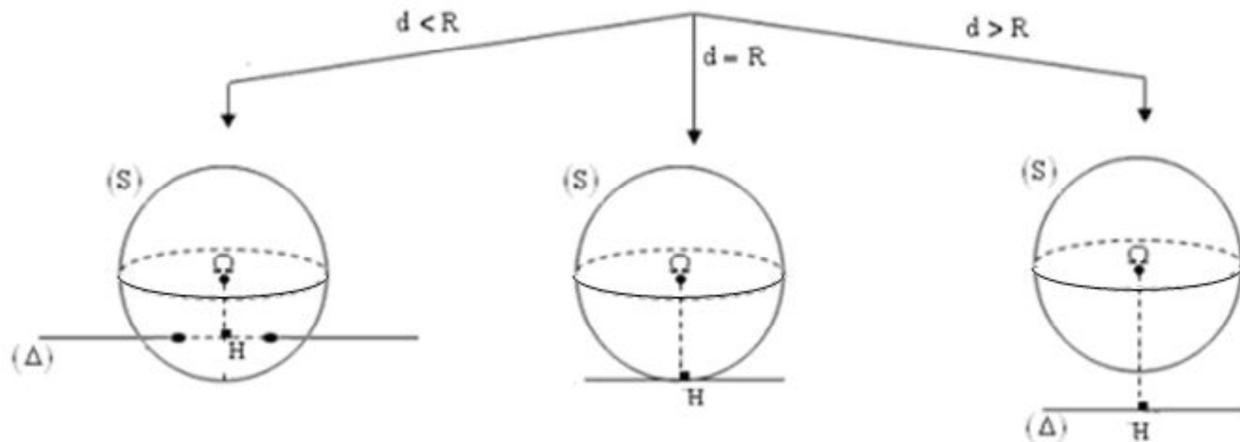
$$r = \sqrt{R^2 - d^2}$$

المستوى (P) مماس للفلكة (S) في النقطة H

المستوى (P) لا يقطع الفلكة (S)

4) الأوضاع النسبية لفلكة و مستقيم :

لتكن (S) فلكة مركزها Ω و شعاعها R . نضع $d = d(\Omega, \Delta)$.
لتكن H المسقط العمودي للمركز Ω على المستوى (Δ)



المستقيم (Δ) يخترق الفلكة (S) في نقطتين مختلفتين	المستقيم (Δ) مماس للفلكة (S) في النقطة H	المستقيم (Δ) و الفلكة (S) لا يتقاطعان
---	---	--

5) الجداء المتجهي :

أ. الصيغة التحليلية للجداء المتجهي :

$$\vec{v} = x \vec{i} + y \vec{j} + z \vec{k} \quad \vec{u} = x \vec{i} + y \vec{j} + z \vec{k}$$

$$\vec{u} \wedge \vec{v} = \begin{vmatrix} y & z \\ z & y \end{vmatrix} \vec{i} - \begin{vmatrix} x & z \\ x & z \end{vmatrix} \vec{j} + \begin{vmatrix} x & y \\ x & y \end{vmatrix} \vec{k}$$

إذا كان $\vec{v} = x \vec{i} + y \vec{j} + z \vec{k}$ و $\vec{u} = x \vec{i} + y \vec{j} + z \vec{k}$ فإن

ب. استقامية متوجهين :

$$\vec{u} \wedge \vec{v} = \vec{0} \quad \text{يكافي } \vec{u} \text{ و } \vec{v} \text{ مستقيمتان}$$

ج. استقامية ثلاثة نقط :

$$\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC} = \vec{0}$$

د. معادلة ديكارتية لمستوى :

إذا كان $\vec{0} \neq \overrightarrow{AB}$ فإن النقط A و B و C غير مستقيمية وبالتالي فهي تحدد لنا مستوى (ABC)
والمتجهة $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}$ هي متجهة منتظمة للمستوى (ABC)
ولدينا : $M \in (ABC) \Leftrightarrow \overrightarrow{AM} \cdot (\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}) = 0$
و منه نستنتج معادلة المستوى (ABC)

ملاحظة: كل مستقيم عمودي على (ABC) يكون موجهاً بالمتجهة $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}$

هـ. مساحة مثلث - مساحة متوازي الأضلاع:

$$S_{ABC} = \frac{\|\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}\|}{2} \text{ هي } ABC \text{ مساحة مثلث}$$

$$S_{ABCD} = \|\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}\| \text{ هي مساحة متوازي الأضلاع}$$

وـ. مسافة نقطة عن مستقيم :

$$d(\Omega, (D)) = \frac{\|\overrightarrow{\Omega A} \wedge \vec{u}\|}{\|\vec{u}\|} \text{ هي مسافة نقطة } \Omega \text{ عن مستقيم } (D) \text{ مار من نقطة } A \text{ و موجه بمتجهة } \vec{u}$$

زـ. متوازي و تعمد مستويين :

نعتبر مستويين P' و P : $a'x + b'y + c'z + d' = 0$ و $ax + by + cz + d = 0$

و $\vec{n}'(a', b', c')$ و $\vec{n}(a, b, c)$ هما متجهتان منظمتان للمستويان (P') و (P)

$\vec{n} \wedge \vec{n}' = \vec{0}$ يكافي $(P) // (P')$

$\vec{n} \cdot \vec{n}' = \vec{0}$ يكافي $(P) \perp (P')$

ك. تقاطع مستويين :

إذا كان (P) و (P') متتقاطعين فإن تقاطعهما هو مستقيم موجه بالتجهيز $\bar{n} \wedge \bar{n}'$